

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Josip Bašić

Zagreb, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**METODA HIDRODINAMIKE  
IZGLAĐENIH ČESTICA ZA  
DINAMIČKU SIMULACIJU  
NESTLAČIVOG FLUIDA**

Mentor:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli, dipl. ing.

Student:

Josip Bašić

Zagreb, 2012.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se prof. Werner i prof. Degiuli na ukazanoj pomoći prilikom izrade rada.

Josip Bašić

# Sadržaj

<b>Popis oznaka</b>	<b>iii</b>
<b>Popis kratica</b>	<b>iv</b>
<b>Popis slika</b>	<b>v</b>
<b>Sažetak</b>	<b>viii</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematički model SPH metode</b>	<b>4</b>
2.1 Aproksimacija integrala . . . . .	5
2.2 Jezgrena funkcija . . . . .	5
2.2.1 Gradijent jezgrene funkcije . . . . .	7
2.2.2 Primjeri jezgrenih funkcija . . . . .	7
2.3 Diskretizacija česticama . . . . .	10
2.4 Ispravljanje gradijenta jezgrene funkcije . . . . .	11
<b>3 Nestlačiva SPH metoda</b>	<b>12</b>
3.1 Klasična projekcijska metoda . . . . .	12
3.2 Standardna inkrementalna projekcijska metoda . . . . .	14
3.3 Rotacijska inkrementalna projekcijska metoda . . . . .	15
<b>4 Implementacija</b>	<b>16</b>
4.1 Generalizacija projekcijskih shema . . . . .	16
4.2 SPH formulacije . . . . .	17
4.3 Rubni uvjeti . . . . .	18
4.4 Rješavanje Poissonove jednadžbe tlaka . . . . .	20
4.4.1 Neumannov uvjet . . . . .	20

4.4.2	Dirichletov uvjet . . . . .	21
4.5	Vremenski korak . . . . .	22
4.6	Vlačna nestabilnost . . . . .	22
4.7	Programsko rješenje . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Verifikacija i validacija metode</b>	<b>27</b>
5.1	Deformacija fluida bez vanjskih utjecaja . . . . .	27
5.1.1	Rastezanje inicijalno kružne kapljice . . . . .	28
5.1.2	Rotacija inicijalno kvadratne kapljice . . . . .	32
5.1.3	Nejednoliki razvoj inicijalno kvadratne kapljice . . . . .	35
5.2	Strujanje u šupljini potaknuto gibanjem gornje stijenke . . . . .	37
5.3	Pucanje brane . . . . .	40
5.3.1	Inicijalni razvoj slobodne površine . . . . .	40
5.3.2	Udar vode u vertikalni zid . . . . .	41
5.4	Ulaz i izlaz krutog tijela iz tekućine . . . . .	43
5.4.1	Ulaz cilindra u vodu konstantnom brzinom . . . . .	44
5.4.2	Izlaz cilindra iz vode konstantnom brzinom . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>49</b>
	<b>Literatura</b>	<b>51</b>
	<b>Dodatak I - Iterativno rješavanje linearnog sustava jednadžbi</b>	<b>55</b>
	<b>Dodatak II - Primjeri ulaznih datoteka</b>	<b>56</b>

# Popis oznaka

<b>A</b>	matrica koeficijenata linearnog sustava jednadžbi
$a$	razmatrana čestica
$b$	čestica u međudjelovanju s razmatranom česticom
<b>b</b>	vektor desne strane linearnog sustava jednadžbi
$d$	broj dimenzija
<b>D</b>	potpuni diferencijal
$\vec{g}$	vanjsko ubrzanje, npr. gravitacija
$h$	duljina izgladivanja jezgrene funkcije
<b>L<sub>a</sub></b>	korekcijska matrica gradijenta jezgrene funkcije
$p$	tlak
$r$	udaljenost između dvije razmatrane čestice
$r_{max}$	polumjer sfere utjecaja jezgrene funkcije
$t$	vrijeme
$\Delta t$	vremenski korak
$\vec{u}$	brzina
$V$	volumen
$w$	jezgrena funkcija
$W$	normirana jezgrena funkcija
$\vec{x}$	položaj čestice
$\alpha_d$	faktor skaliranja jezgrene funkcije, ovisan o broju dimenzija
$\beta$	faktor diferencijacije
$\delta$	Diracova delta funkcija
$\phi$	modificirani tlak
$\lambda$	inicijalni razmak među česticama
$\mu$	dinamička viskoznost
$\nu$	kinematička viskoznost
$\rho$	gustoća fluida
$\Omega$	domena fluida
$\nabla$	Hamiltonov operator
$\nabla^2$	Laplaceov operator

# Popis kratica

**2D** dvodimenzionalno

**3D** trodimenzionalno

**BiCGSTAB** BiConjugate Gradient Stabilized

**BEM** Boundary Element Method

**CFD** Computational Fluid Dynamics

**CFL** Courant–Friedrichs–Lewy

**CPU** Central Processing Unit

**CSV** Comma-Separated Values

**FVPM** Finite Volume Particle Method

**GMRES** Generalized Minimal Residual

**GPU** Graphics Processing unit

**ISPH** Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics

**MPS** Moving Particle Semi-implicit

**OpenCL** Open Computing Language

**SPH** Smoothed Particle Hydrodynamics

**VTK** Visualization Toolkit

**WCSPH** Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics

**XML** Extensible Markup Language

# Popis slika

1.1	<i>Primjeri nekih inženjerskih problema pogodnih za SPH . . . . .</i>	3
2.1	<i>Jezgrena funkcija i njezina domena izgladiivanja za neku česticu . . . . .</i>	6
2.2	<i>Gaussova jezgrena 2D funkcija s <math>h = 1</math> . . . . .</i>	8
2.3	<i>Kubični B-spline jezgrena 2D funkcija s <math>h = 1</math> . . . . .</i>	9
2.4	<i>B-spline petog reda jezgrena 2D funkcija s <math>h = 1</math> . . . . .</i>	9
4.1	<i>Raspored prividnih čestica zaobljenih stijenki (crno - čestice stijenki, bijelo - prividne čestice stijenki) . . . . .</i>	19
4.2	<i>Raspored prividnih čestica za rub s unutarnjim tokom (crno - čestice stijenki, bijelo - prividne čestice stijenki, sivo - prividne čestice spojnice stijenki) . . . . .</i>	19
4.3	<i>Raspored čestica u simulaciji vrtloženja Tylor-Green bez i sa ispravljanjem položaja čestica, prema [22] . . . . .</i>	23
4.4	<i>Pretvorba geometrije problema u diskretizirani skup čestica . . . . .</i>	25
5.1	<i>Fluid s početnim poljem brzina, okružen vakuumom . . . . .</i>	28
5.2	<i>Kružna kapljica s kvalitativno prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina . . . . .</i>	29
5.3	<i>Usporedba vrijednosti tlaka u središtu eliptične kapljice koje su dobivene analitičkim putem i ISPH metodom . . . . .</i>	30
5.4	<i>Usporedba vrijednosti vertikalne i horizontalne komponente brzine koje su dobivene analitičkim putem i ISPH metodom, na mjestima B i C . . . . .</i>	31
5.5	<i>Razvoj kapljice u vremenskim trenucima <math>tA_0 = 0, 5; 0, 8; 1, 2; 2, 0</math> s prikazanim poljem tlaka . . . . .</i>	31
5.6	<i>Kvadratna kapljica s kvalitativno prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina . . . . .</i>	32
5.7	<i>Vrijednosti tlaka u središtu rotacijske kapljice dobivene pomoću BEM i ISPH metode . . . . .</i>	34
5.8	<i>Razvoj kvadratne kapljice s prikazanim poljem veličina brzina u vremenskim trenucima <math>t_w = 2, 04</math> i <math>t_w = 4</math>. Usporedba slobodne površine dobivene BEM (iscrtkana linija) i ISPH metodom (obojeno). . . . .</i>	34



5.9	<i>Kvadratna kapljica s prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina . . . . .</i>	35
5.10	<i>Nejednoliki razvoj kapljice s kvalitativno prikazanim veličinama brzina u vremenskim trenucima <math>t\omega = 0; 0,2; 0,4; 0,8; 1,2; i 1,5</math>. Usporedba slobodne površine dobivene ISPH metodom (oboјano) i FDM/LSM metodom (crna linija) [32] . . . . .</i>	36
5.11	<i>Geometrija šupljine s pokretnom gornjom stijenkom . . . . .</i>	37
5.12	<i>Horizontalne komponente brzine na vertikalnoj simetrali i vertikalne komponente brzine na horizontalnoj simetrali šupljine, za <math>Re = 400</math> . . . . .</i>	38
5.13	<i>Horizontalne komponente brzine na vertikalnoj simetrali i vertikalne komponente brzine na horizontalnoj simetrali šupljine, za <math>Re = 1000</math> . . . . .</i>	39
5.14	<i>Ustaljena polja veličina brzina <math> \vec{u} /U</math> u trenutku <math>t = 40\text{ s}</math>, za <math>Re = 400</math> i <math>Re = 1000</math> . . . . .</i>	39
5.15	<i>Geometrija primjera pucanja brane s mokrim koritom. U slučaju suhog korita, na području <math>x_1</math> vrijedi <math>d = 0</math> . . . . .</i>	40
5.16	<i>Usporedba inicijalnog razvoja slobodne površine dobivene ISPH metodom (oboјano) i analizom potencijalnog strujanja (crna linija). . . . .</i>	41
5.17	<i>Usporedba vrijednosti tlaka nakon udara vode u zid u ovisnosti o vremenu, dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [38]. Tlak je mјeren na visini od 1 cm, a eksperimentalni rezultati su osrednјeni. . . . .</i>	42
5.18	<i>Razvoj strujanja vode nakon udara u zid s kvalitativno prikazanim poljem tlaka</i>	42
5.19	<i>Shema testa ulaza cilindra u vodu konstantnom brzinom . . . . .</i>	43
5.20	<i>Shema testa izlaza cilindra iz vode konstantnom brzinom . . . . .</i>	44
5.21	<i>Simulacija ulaza cilindra u vodu, eksperiment br. 1, <math>U = 0,5124\text{ m/s}</math>, <math>F_n = 0,4627</math> . . . . .</i>	45
5.22	<i>Bezdimenzionalni slamming koeficijent za eksperiment br. 1, <math>U = 0,5124\text{ m/s}</math>, <math>F_n = 0,4627</math>. Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [40]. . . . .</i>	46
5.23	<i>Bezdimenzionalni slamming koeficijent za eksperiment br. 2, <math>U = 0,876\text{ m/s}</math>, <math>F_n = 0,791</math>. Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [40]. . . . .</i>	46

5.24	<i>Simulacija izlaza cilindra iz vode, eksperiment br. 1, <math>U = 0,5124</math> m/s, <math>F_n = 0,4627</math></i>	47
5.25	<i>Bezdimenzionalna sila prilikom izlaza iz vode za eksperiment br. 1, <math>U = 0,5124</math> m/s, <math>F_n = 0,4627</math>. Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom, eksperimentalno [40] i analitički [41].</i>	48

# Sažetak

Postoje različiti problemi dinamike fluida u inženjerskoj praksi koji uključuju slobodnu površinu. U brodogradnji neki od primjera su udaranje pramca broda, zapljuskivanje u tankovima, zalijevanje palube i sl. Simulacije strujanja sa slobodnom površinom, kao i općenito strujanja s pomičnim granicama je dosta teško opisati tradicionalnim Eulerovim metodama, poput metode konačnih razlika i konačnih volumena s nepromjenjivom mrežom. U posljednjih petnaest godina sve više se razvijaju bezmrežne Lagrangeove metode ili pak kombinacije Euler-Lagrangeovih metoda koje posjeduju sposobnost opisivanja slobodne površine s velikim deformacijama. U ovom radu je prikazana Lagrangeova metoda hidrodinamike izgladenih čestica, tzv. ISPH metoda za simuliranje dinamike nestlačivog viskoznog strujanja fluida. ISPH metoda je atraktivan izbor za simuliranje nestlačivog strujanja fluida jer se temelji na jednostavnim SPH formulacijama, a rješava polje tlaka i brzina je implicitno pomoću projekcijske sheme rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi. Razvijena je računalna implementacija pomoću koje je provedena verifikacija i validacija predloženog modela. Simulirani su različiti problemi za koje su poznata analitička, eksperimentalna ili već verificirana numerička rješenja. Provedena su četiri tipa simulacija: razvoj fluida u vakuumu, strujanje fluida bez slobodne površine, strujanje fluida s slobodnom površinom te udari krutog tijela s fluidom.

# 1 Uvod

Numerička simulacija je postala važan alat za rješavanje inženjerskih problema, a problemi mehanike fluida sa slobodnom površinom su od velike važnosti. Uz pomoć snage koja pružaju današnja računala i koja je u konstantnom porastu, potrebno je uvoditi sve manje pretpostavki te problemi mogu biti riješeni s više traženih detalja. Numeričke simulacije nadopunjuju i pomalo zamjenjuju skupe i komplicirane eksperimente. Numeričke simulacije zahtijevaju prevođenje fizičkog problema u diskretan sustav matematičkih jednadžbi. Konkretno za dinamiku fluida, to je sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u vremenu i prostoru. Uz dovoljno početnih i rubnih uvjeta te određenu diskretizaciju prostora i vremena, rješenje navedenog sustava je moguće naći numeričkom integracijom. Postoji više načina diskretiziranja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i tretiranja slobodne površine.

Tradicionalne Eulerove metode s nepromjenjivom mrežom imaju poteškoće pri opisivanju slobodne površine, dok Langrangeove metode posjeduju prirodnu sposobnost da detaljnije opišu navedeni fenomen. Metode koje kombiniraju Eulerovu mrežu s česticama, poput metode čestica u ćeliji (eng. *Particle-in-Cell method*) i markera u ćeliji (eng. *Marker-and-Cell method*) pokušavaju kompenzirati nedostatke mrežnih metoda. Međutim, navedene metode pate od prekomjerne numeričke difuzije ili neispravnog rješavanja nelinearne advekcije.

Numeričke simulacije problema koji uključuju slobodnu površinu koristeći Langrangeove bezmrežne (eng. *meshless, mesh-free method*) metode postaju u praksi sve popularnije. Jedan podskup bezmrežnih metoda čine metode sustava čestica koje dopuštaju simuliranje problema s velikim deformacijama. Ne postoje ograničenja za geometriju sustava ili koliko se sustav smije razvijati od početnih uvjeta. SPH (eng. *Smoothed Particle Hydrodynamics*) je jedna od najstarijih takvih metoda koju su predstavili Lucy [1], Gingold i Monaghan [2] 1977. godine, a nastala je iz potrebe rješavanja astrofizičkih problema. U posljednje vrijeme, SPH metoda se razvija velikom brzinom i postaje jedinstveni alat za rješavanje problema dinamike fluida zahvaljujući njenom formalizmu koji ne zahtjeva mrežu i mogućnosti podnošenja velikih deformacija i morfoloških promjena. Međutim, SPH je relativno novi alat i nije razvijen koliko i npr. metoda konačnih razlika ili konačnih volumena.

Tradicionalno SPH metoda primjenjuje uvjet slabe stlačivosti (eng. *Weakly Compressible SPH*) koju je uveo Monaghan [3, 4], kroz jednadžbu stanja koja ovisi o gustoći i brzini zvuka u razmatranom mediju. WCSPH algoritam je potpuno eksplicitan i jednostavan za implementaciju, ali posjeduje niz nedostataka. Velika brzina zvuka zbog ograničavajućeg

CFL kriterija nameće iznimno mali potreban vremenski korak, a tlak fluktuiira što dovodi do numeričke nestabilnosti i kviri rezultate. Kako bi prevladali navedene probleme, Cummins i Rudman [5] su predstavili nestlačivu SPH metodu (eng. *Incompressible SPH method*) koja se temelji na projekcijskoj shemi rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi. Rezultati verifikacijskih testova su pokazali kako ISPH metoda eliminira poteškoće s kojima se susreće WCSPH te daje točnija predviđanja brzine i tlaka.

Primjer praktičnih inženjerskih problema koji su pogodni za simuliranje SPH metodom su žestoki udari gravitacijskih valova na konstrukcije. Trenutni trend je izgradnja konstrukcija na moru na većim udaljenostima od obale, poput vjetroparkova kako bi iskoristili veću brzinu vjetra i kako bi se izbjegli zvučne i vizualni problemi. Takva konstrukcija podliježe većim opterećenjima gravitacijskih valova. Osim navedenih konstrukcija, postoji sijaset drugih konstrukcija koji su zahvaćeni istim problemom poput morskih platformi, ribogojilišta, svjetionika, luka i marina itd. Brzi brodovi predstavljaju još jedan primjer u kojima "silovito" međudjelovanje slobodne površine i krute konstrukcije igra važnu ulogu. Neki od relevantnijih fenomena vezani uz ovu temu su udaranje dna i pramca broda (eng. *slamming*) te uzorak valova generiranim kretanjem broda. Zapljuskivanje u tankovima broda, tzv. *sloshing*, te zalijevanje morske vode na palubu broda (eng. *green water*) također su primjeri problema koji su od veće važnosti.



Slika 1.1: *Primjeri nekih inženjerskih problema pogodnih za SPH*

## 2 Matematički model SPH metode

Objašnjenje i predviđanje dinamike tekućina i plinova mogu se opisati Navier-Stokesovim jednadžbama, koje su formulirali 1822. godine Claude-Louis Navier i George Gabriel Stokes. Međutim teorijska shvaćanja rješenja tih jednadžbi i dalje su nepotpuna. Za 3D sustav jednadžbi i zadane početne uvjete, matematičari još uvijek nisu dokazali da glatka rješenja uvijek postoje. Taj problem je prema "Clay Mathematics Institute" naveden kao jedan od sedam trenutno neriješenih "milenijskih" problema [6]. Navier-Stokesove jednadžbe proizlaze iz drugog Newtonovog zakona uz pretpostavku da je naprezanje u fluidu ovisno o difuziji i tlaku. U mnogim slučajevima gustoća fluida  $\rho$  se može pretpostaviti konstantnom u cijeloj njegovoj domeni, ne samo za tekućine čija stlačivost zbilja može biti zanemariva, nego i za plinove čiji je Machov broj,  $M = u/c$ , manji od 0,3, gdje je  $u$  karakteristična brzina fluida, a  $c$  brzina širenja zvuka u fluidu. Ukoliko je tok i izoterman, viskoznost fluida je također konstantna.

Kod nestlačive SPH metode te se jednadžbe rješavaju u Lagarangeovom obliku, koje su prikazane slijedećim jednadžbama:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{u} \quad (2.3)$$

gdje je  $\vec{u}$  brzina čestice,  $p$  je tlak,  $\vec{g}$  je vanjsko ubrzanje (npr. gravitacija ili centrifugalno ubrzanje),  $\nu$  je kinematička viskoznost fluida, a  $\vec{x}$  je položaj čestice. Potpuni diferencijal vektorske funkcije  $D/Dt$ , odnosno materijalna derivacija prema definciji glasi:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.4)$$

Jednadžba (2.1) se naziva Navier-Stokesova jednadžba, a izražena je u vektorskom obliku. Jednadžba (2.2) je uvjet nestlačivosti fluida koji proizlazi iz jednadžbe kontinuiteta, koja kaže da je količina fluida koja uđe u neko područje jednaka količini fluida koja izađe iz tog područja. Samo za mali broj slučajeva, pretežno potpuno razvijenih tokova u jednostavnim geometrijama, postoji jedinstveno analitičko rješenje. Ti specijalni slučajevi su bitni za proučavanje osnova dinamike fluida i verificiranje numeričkih metoda, ali njihova praktična primjena je ograničena.

## 2.1 Aproksimacija integrala

Matematički model metode SPH se temelji na opisu funkcije  $f$  pomoću integrala i Diracove delta funkcije:

$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{x}') \delta(|\vec{x} - \vec{x}'|) d\vec{x}' \quad (2.5)$$

gdje je  $\Omega$  domena fluida,  $f(\vec{x})$  je neka skalarna funkcija, a  $\delta(x)$  je Diracova delta funkcija koja se može okarakterizirati kao funkcija čiji je iznos uvijek nula osim u ishodištu:

$$\delta(x) := \begin{cases} +\infty & \text{za } x = 0 \\ 0 & \text{za } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Očito, vrijedi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ . Zamjenjujući Diracovu delta funkciju prikladnom jezgrenom funkcijom (eng. *kernel function*), funkcija  $f$  se može aproksimirati slijedećim izrazom:

$$f(\vec{x}) \approx \int_{\Omega} f(\vec{x}') w(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d\vec{x}' \quad (2.7)$$

gdje je  $w(r, h)$  jezgrena funkcija, a  $h$  je duljina izgladivanja (eng. *smoothing length*), to jest vrijednost koja definira domenu utjecaja jezgrene funkcije. Gradijent funkcije  $f$  je moguće zapisati kao:

$$\nabla f(\vec{x}) \approx \int_{\Omega} f(\vec{x}') \nabla w(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d\vec{x}' \quad (2.8)$$

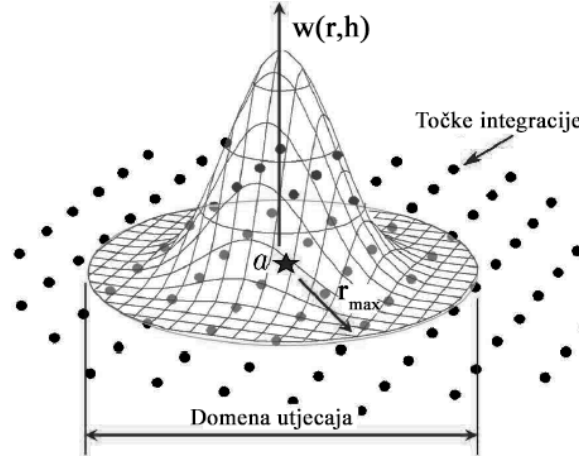
a divergenciju vektorske funkcije  $\vec{f}$  kao:

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) \approx \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}') \cdot \nabla w(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d\vec{x}' \quad (2.9)$$

## 2.2 Jezgrena funkcija

Među slijaset različitih jezgrenih funkcija koje se koriste u SPH metodama, najčešće su korištene one koje se temelje na spline ili eksponencijalnim funkcijama. Ako bi uspoređivali SPH metodu s metodom konačnih razlika, izbor određene jezgrene funkcije, slika 2.1, sličan je izboru diskretizacije, a izbor duljine izgladivanja sličan je izboru veličine konačnog elemenata.





Slika 2.1: Jezgrena funkcija i njezina domena izgladivanja za neku česticu

Bitne karakteristike jezgrenih funkcija su:

- Domena utjecaja funkcije definirana je kao kugla čiji je polumjer jednak produktu neke konstante  $C$  i duljine izgladivanja  $h$ ,  $r_{max} = C h$ , te vrijedi:

$$w(r, h) = 0 \quad \text{za } r \geq r_{max} \quad (2.10)$$

U praksi se najčešće uzima  $C = 2$ . Duljina izgladivanja jednaka je produktu konstante  $K$  i inicijalnog razmaka čestica  $\lambda$ ,  $h = K \lambda$ . Iako nije striktno određeno, konstanta duljine izgladivanja se najčešće uzima u intervalu  $1, 2 \leq K \leq 2$ .

- Jezgrene funkcije imaju svojstvo parnosti:

$$w(r, h) = w(-r, h) \quad (2.11)$$

što osigurava da će sve jednako razmaknute čestice jednakih duljina izgladivanja međusobno simetrično utjecati.

- Funkcije su striktno pozitivne i monotonno padajuće. Pozitivnost funkcije osigurava da je aproksimacija funkcije preko sume formirana od osrednjenih vrijednosti u razmatranim točkama. Monotonost padanja vrijednosti funkcije osigurava da snaga međudjelovanja parova čestica opada s porastom udaljenosti.
- Smanjivanjem duljine izgladivanja funkcija se približava Diracovoj delta funkciji kako bi se aproksimacija približavala željenoj funkciji:

$$\lim_{h \rightarrow 0} w(r, h) = \delta(r) \quad (2.12)$$

- Da bi aproksimacija integrala egzaktno aproksimirala željenu konstantu funkciju, mora vrijediti uvjet konzistentnosti nultog reda:

$$\int_{\Omega} w(r, h) dr = 1 \quad (2.13)$$

Jezgrene funkcije su u općenitom obliku dane kao:

$$w(r, h) = \frac{\alpha_d}{h^d} f(r), \quad r = |\vec{x} - \vec{x}'| \in [0, Ch] \quad (2.14)$$

gdje faktor  $\alpha_d$  skalira funkciju kako bi zadovoljila uvjet konzistentnosti nultog reda (2.13), a  $d$  je broj dimenzija.

Ukoliko je zadovoljen uvjet:

$$\int_{\Omega} r^n w(r, h) dr = 0 \quad \text{za } 1 \leq n \leq k \quad (2.15)$$

onda je aproksimacija konzistentnosti  $k$ -tog reda.

### 2.2.1 Gradijent jezgrene funkcije

Gradijent jezgrene funkcije računa se kao:

$$\nabla w(r, h) = \frac{\partial w}{\partial r} \nabla r \quad (2.16)$$

gdje se gradijent udaljenosti razmatranih čestica  $\nabla r$  može prikazati preko identiteta  $\nabla(r^2) = 2r \nabla r = 2(\vec{x} - \vec{x}')$ . Prema tome slijedi da je gradijent jezgrene funkcije dan sljedećim izrazom:

$$\nabla w(r, h) = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.17)$$

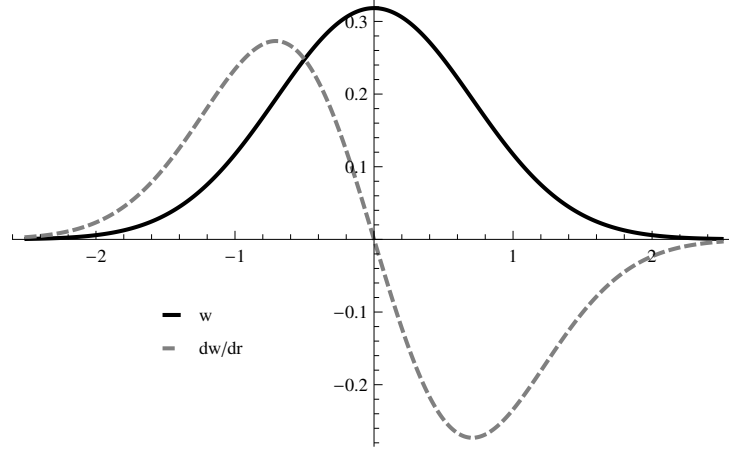
### 2.2.2 Primjeri jezgrenih funkcija

- Gaussova funkcija

Jezgrena funkcija koja se temelji na eksponencijalnoj funkciji, slika 2.2, dana je izrazom:

$$w(r, h) = \alpha_d \begin{cases} \exp(-q^2) & \text{za } 0 \leq q < C \\ 0 & \text{za } C \leq q \end{cases} \quad (2.18)$$

gdje je  $q$  omjer udaljenosti razmatranih čestica i duljine izgladivanja,  $q = r/h$ , a  $\alpha_d$  je faktor ovisan o broju dimenzija  $d$ ,  $\alpha_2 = 1/(\pi h^2)$ , odnosno  $\alpha_3 = 1/(\pi^{3/2} h^3)$ . Funkcija je beskonačno mnogo puta derivabilna, no nepoželjna karakteristika eksponencijalne funkcije jest da daje vrijednost različitu od nule u cijeloj domeni relanih brojeva te bi u teoriji sve čestice morale biti uključene u sumu. U praksi je ova funkcija najčešće skraćena s  $C = 2,5$  odnosno s  $C = 3$ . Gaussove funkcije daju vrlo dobre rezultate za simulacije problema sa stabilnim poljem tlaka [10].



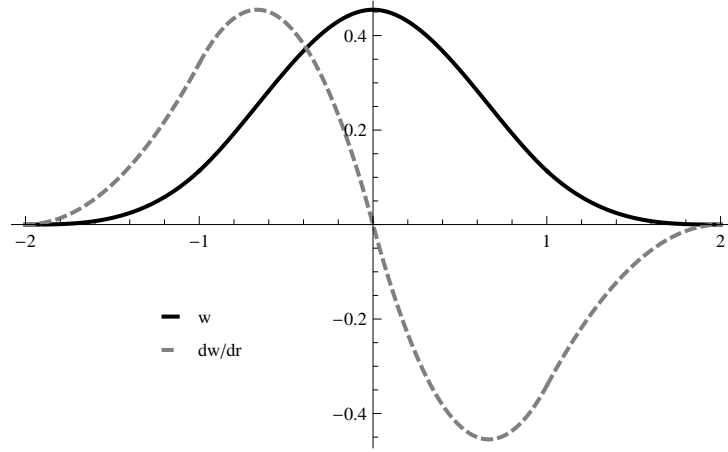
Slika 2.2: Gaussova jezgrena 2D funkcija s  $h = 1$

### • Kubični B-spline

Spline funkcije su u odnosu na Gaussovu funkciju stabilnije i računski jednostavnije [7]. U praksi najčešće korištena jezgrena funkcija je kubični B-spline, slika 2.3, dana je izrazom:

$$w(r, h) = \alpha_d \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{za } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{za } 1 \leq q < 2 \\ 0 & \text{za } 2 \leq q \end{cases} \quad (2.19)$$

gdje je  $\alpha_d$  faktor ovisan o broju dimenzija  $d$ ,  $\alpha_2 = 10/(7\pi h^2)$ , odnosno  $\alpha_3 = 1/(\pi h^3)$ .

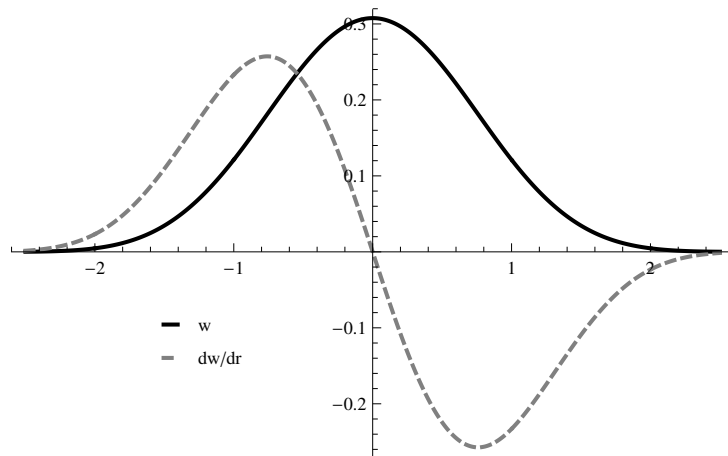
Slika 2.3: Kubični B-spline jezgrena 2D funkcija s  $h = 1$ 

- B-spline petog reda

B-spline petog reda, slika 2.4, koji je uveo Morris [7] dan je izrazom:

$$w(r, h) = \alpha_d \begin{cases} (3-q)^5 - 6(2-q)^5 + 15(1-q)^5 & \text{za } 0 \leq q < 1 \\ (3-q)^5 - 6(2-q)^5 & \text{za } 1 \leq q < 2 \\ (3-q)^5 & \text{za } 2 \leq q < 3 \\ 0 & \text{za } 3 \leq q \end{cases}$$

gdje je  $\alpha_d$  faktor ovisan o broju dimenzija  $d$ ,  $\alpha_2 = 7/(478\pi h^2)$ , odnosno  $\alpha_3 = 3/(358\pi h^3)$ . Za niže Reynoldsove brojeve, B-spline petog reda pokazao se stabilnijim nego kubični B-spline.

Slika 2.4: B-spline petog reda jezgrena 2D funkcija s  $h = 1$

## 2.3 Diskretizacija česticama

Kako bi se razvila praktična numerička shema, domena fluida je diskretizirana konačnim skupom čestica. Čestice nose određene karakteristike poput mase, volumena, tlaka i vektora brzine, koje su smještene u centru čestice. Budući da su čestice sa svojim karakteristikama raspršene u prostoru, mogu se gibati neovisno jedna o drugoj.

Jednadžbu (2.7) je za položaj neke čestice  $a$  moguće diskretizirati sumom, koja se odnosi na sve čestice koje sadrži domena utjecaja jezgrene funkcije ne uključujući česticu  $a$ :

$$\begin{aligned} f_a &\approx \sum_{b \in N} V_b f(\vec{x}_b) w(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|, h_b) \\ f_b &\approx \sum_{b \in N} V_b f(\vec{x}_b) w_{ab} \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdje je  $V_b$  volumen susjedne čestice  $b$  koji iznosi  $m_b/\rho_b$ , a radi jednostavnosti pisanja  $w_{ab} \equiv w(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|, h_b)$ . Analogno je moguće diskretizirati jednadžbu (2.8) u položaju čestice  $a$  na slijedeći način:

$$\nabla f_a \approx \sum_{b \in N} V_b f(\vec{x}_b) \nabla w_{ab} \quad (2.21)$$

što nazivamo osnovni SPH oblik gradijenta.

Jednadžbu (2.9) u položaju čestice  $a$  moguće je diskretizirati na sljedeći način:

$$\nabla \cdot \vec{f}_a \approx \sum_{b \in N} V_b \vec{f}(\vec{x}_b) \cdot \nabla w_{ab} \quad (2.22)$$

što nazivamo osnovni SPH oblik divergencije.

Iako se osnovni operatori gradijenta i divergencije mogu dobiti direktno iz SPH interpolacije, korištenje istih može dovesti do problema [8]. Postoje alternativni načini za opisivanje gradijenta poput slijedeća dva izraza:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla(\rho f(\vec{x})) - f(\vec{x}) \nabla \rho] \quad (2.23)$$

$$\nabla f(\vec{x}) = \rho \left[ \nabla \left( \frac{f(\vec{x})}{\rho} \right) + \frac{f(\vec{x})}{\rho^2} \nabla \rho \right] \quad (2.24)$$

koji se mogu zapisati u SPH formi na sljedeći način:

$$\nabla f_a \approx \frac{1}{\rho_a} \sum_{b \in N} m_b [f(\vec{x}_b) - f(\vec{x}_a)] \nabla w_{ab} \quad (2.25)$$

$$\nabla f_a \approx \rho_a \sum_{b \in N} m_b \left[ \frac{f(\vec{x}_a)}{\rho_a^2} + \frac{f(\vec{x}_b)}{\rho_b^2} \right] \nabla w_{ab} \quad (2.26)$$

Jednadžba (2.25) je simetrična, a jednadžba (2.26) asimetrična kada se čestice  $a$  i  $b$  zamijene. Asimetrični oblik osigurava očuvanje količine linearnog gibanja [3] i standardno se koristi za gradijent tlaka.

## 2.4 Ispravljanje gradijenta jezgrene funkcije

Bonet i Lok [9] su predstavili metodu ispravljanja gradijenta jezgrene funkcije kako bi se sačuvala kutna količina gibanja u SPH oblicima gradijenta i divergencije. Oger *et al.* [8] pokazali su kako je tom metodom moguće dovesti točnost jednadžbe (2.25) do drugog reda. Ispravljeni gradijent jezgrene funkcije dan je izrazom:

$$\nabla W_{ab} = \mathbf{L}_a \nabla w_{ab} \quad (2.27)$$

gdje je  $\mathbf{L}_a$  korekcijska matrica veličine  $d \times d$ , a  $d$  je broj dimenzija. Korekcijska matrica glasi:

$$\mathbf{L}_a = \left[ \sum_{b \in N} V_b \nabla w_{ab} \otimes (\vec{x}_b - \vec{x}_a) \right]^{-1} \quad (2.28)$$

Inverziju korekcijske matrice, koja je simetrična, moguće je provesti analitički. Potrebno je napomenuti kako je ovom metodom zakon o očuvanju količine gibanja poremećen, ali unatoč tome simetrični SPH oblici s ispravljenim gradijentom jezgrene funkcije daju bolje rezultate nego asimetrični oblici za koje implicitno vrijedi zakon o očuvanju količine gibanja [8]. Međutim prilikom simuliranja problema s burnom slobodnom površinom, gdje je očuvanje karakteristika bitno da bi se očuvala robustnost numeričke sheme, korištenje korekcijske matrice može prouzročiti lošije rezultate [10].

### 3 Nestlačiva SPH metoda

Nestlačiva SPH metoda (eng. *Incompressible SPH method*) zasniva se na projekcijskoj shemi rješavanja Navier-Stokeseovih jednadžbi, koju su odvojeno zamislili Chorin i Temam 1960-ih godina [11, 12]. U projekcijskoj metodi, tlak koji je potreban da se zadovolji uvjet nestlačivosti dobiva se projiciranjem polja brzina na solenoidalni prostor. Metoda se zasniva na Helmholtz-Hodge dekompoziciji prema kojoj bilo koje vektorsko polje  $\vec{V}$  može biti jedinstveno raščlanjeno na solenoidalni dio  $\vec{V}_{sol}$  i bezvrtložni dio, koji je prikazan preko gradijenta skalarnog polja  $\nabla f$ :

$$\vec{V} = \vec{V}_{sol} + \nabla f \quad (3.1)$$

Kako vrijedi  $\nabla \cdot \vec{V}_{sol} = 0$  i  $\nabla \times \nabla f = 0$ , divergencija jednadžbe (3.1) rezultira izrazom:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 f \quad (3.2)$$

koji se naziva Poissonova jednadžba za skalarnu funkciju  $f$ . Ukoliko je poznato nesolenoidalno vektorsko polje  $\vec{V}$ , Poissonovu jednadžbu (3.2) moguće je riješiti te dobiti solenoidalno polje  $\vec{V}_{sol}$  prema jednadžbi (3.1).

#### 3.1 Klasična projekcijska metoda

Klasična projekcijska metoda [5], koja se još naziva i homogena ili neinkrementalna, rješava problem tako da je diskretizirani oblik jednadžbe (2.1) podijeljen na dva dijela. Prvi, predviđajući korak, dan je izrazima:

$$\vec{x}^* = \vec{x}^n + \vec{u}^n \Delta t \quad (3.3)$$

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} = \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{u}^n) + \vec{g} \quad (3.4)$$

gdje se eksplicitno izračunaju pomoćni položaji čestica  $\vec{x}^*$  i pomoćno polje brzina  $\vec{u}^*$  na temelju viskoznog i vanjskog ubrzanja zanemarujući član gradijenta tlaka. Drugi, projekcijski korak, temelji se na jednadžbi koja je analogna jednadžbi (3.1) te glasi:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (3.5)$$

Ako se raspiše divergencija jednadžbe (3.5) kao:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) \quad (3.6)$$

i zadovolji jednadžba kontinuiteta (2.2), jednadžbu (3.6) je moguće zapisati analogno jednadžbi (3.2) kao:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^*}{\Delta t} \quad (3.7)$$

koja se naziva Poissonova jednadžba tlaka. Kada se dobije polje tlaka rješavajući jednadžbu (3.7), pomoćno polje brzina je prema jednadžbi (3.5) ispravljeno gradijentom tlaka:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* - \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) \Delta t \quad (3.8)$$

Naposljetku, prema (2.3) čestice vrše pomak s ispravljenom brzinom:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \left( \frac{\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^n}{2} \right) \Delta t \quad (3.9)$$

Rubni uvjet za brzinu uz stijenke glasi:

$$\vec{u}^{n+1} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0 \quad (3.10)$$

te iz jednadžbe (3.5) slijedi homogeni uvjet za tlak:

$$\nabla p^{n+1} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0 \quad (3.11)$$

Ovaj umjetni Neumannov rubni uvjet uzrokuje numerički rubni sloj koji spriječava shemu da rezultira točnošću prvog reda za brzinu u  $H^1$ -normi i tlak u  $L^2$ -normi [13]. Ovo je poznat problem i nije specifičan samo za SPH metodu. Greška klasične projekcijske sheme je reda  $\mathcal{O}(\Delta t)$ , pa korištenje višeg reda vremenske diferencijacije ne bi rezultiralo znatnijim poboljšanjem točnosti. Za većinu problema klasična metoda daje prihvatljiva odstupanja, no za kompliciranije simulacije potreban je fizički konzistentan rubni uvjet tlaka.



### 3.2 Standardna inkrementalna projekcijska metoda

Gradijent tlaka u jednadžbi (3.4) očito izostaje te je Goda [14] prvi uočio kako bi dodavanjem gradijenta tlaka iz prethodnog vremenskog koraka i sukladno tomu ispravljanjem polja brzina u drugom koraku povećalo točnost. Ideju je popularizirao Van Kan koji je to kombinirao s shemom vremenske diferencijacije drugog reda [15]. Predviđajući korak glasi:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\bar{u}^* - 4\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p^n + \nabla (\nu \nabla \bar{u}^n) + \bar{g} \quad (3.12)$$

dok je prema Helmholtz-Hodge dekompoziciji:

$$\frac{3}{2\Delta t} (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^*) = -\frac{1}{\rho} \nabla \phi^{n+1} \quad (3.13)$$

gdje je  $\phi^{n+1}$  modificirani tlak, odnosno razlika tlakova:

$$\phi^{n+1} = p^{n+1} - p^n \quad (3.14)$$

Upotreba člana  $\phi^{n+1}$  u korekcijskom koraku umjesto  $p^{n+1}$  je ključna razlika od klasične sheme. Član  $\phi^{n+1}$  može se dobiti iz Poissonove jednadžbe sa svojim homogenim Neumanovim uvjetom:

$$\nabla \left( \frac{1}{\rho} \nabla \phi^{n+1} \right) = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \bar{u}^* \quad (3.15)$$

U korekcijskom koraku javit će se razlika tlakova trenutnog i prošlog vremenskog koraka.

Iz uvjeta (3.10) i jednadžbe (3.13) slijedi uvjet za tlak  $\nabla (p^{n+1} - p^n) \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0$  prema kojem također vrijedi:

$$\nabla p^{n+1} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = \nabla p^n \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = \dots = \nabla p^0 \cdot \vec{n}|_{\Gamma} \quad (3.16)$$

Dakle, shema ima točnost drugog reda za brzinu u  $L^2$ -normi, ali je i dalje ograničena numeričkim rubnim slojem koji onemogućuje potpunu točnost drugog reda za brzinu u  $H^1$ -normi i tlak u  $L^2$ -normi. Greška sheme je reda  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ , pa je korištenje drugog reda vremenske diferencijacije logičan izbor.

### 3.3 Rotacijska inkrementalna projekcijska metoda

Da bi se nadvladale poteškoće koje su uzrokovane umjetnim Neumannovim rubnim uvjetom Timmermans, Minev i Van De Vosse [16] predložili su nešto različitu shemu. Predviđajući i projekcijski korak jednak je kao u standardnoj inkrementalnoj metodi, jednadžbe (3.12) i (3.13), ali je razlici tlakova dodan novi član:

$$\phi^{n+1} = p^{n+1} - p^n + \mu \nabla \cdot \vec{u}^* \quad (3.17)$$

Supstitucijom jednadžbe (3.17) u zbroj jednadžbi (3.12) i (3.13) dobije se:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\vec{u}^{n+1} - 4\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nu \nabla^2 \vec{u}^{n+1} + \vec{g} \quad (3.18)$$

gdje je korišten identitet rotora vektora vrtloženja:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{u}^*) - \nabla^2 \vec{u}^* = \nabla \times \nabla \times \vec{u}^* = \nabla \times \nabla \times \vec{u}^{n+1} = -\nabla^2 \vec{u}^{n+1} \quad (3.19)$$

prema kojemu je shema dobila ime. Iz uvjeta (3.10) i jednadžbe (3.13) uz (3.17), slijedi nehomogeni rubni uvjet za tlak:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = (\vec{g} + \nabla^2 \vec{u}^{n+1}) \cdot \vec{n}|_{\Gamma} \quad (3.20)$$

koji je konzistentan s jednadžbom (2.1) i nije ograničen umjetnim rubnim slojem kao prethodne sheme.

Aproksimacija tlaka i brzine s rotacijskom inkrementalnom shemom je drugog reda točnosti u kanalima, dok je za općenite probleme realno predviđanje za tlak reda točnosti tri polovine.

## 4 Implementacija

U daljnjem tekstu opisana je implementacija ISPH metode što uključuje projekcijsko rješavanje polja tlaka i brzina, korištene SPH formulacije, implementaciju rubnih uvjeta, uvjete napredovanja te programsko rješenje.

### 4.1 Generalizacija projekcijskih shema

Projekcijska shema okarakterizirana je: redom diferencijacije  $q$ , redom inkrementacije  $r$  i rotacijskim članom  $\chi$ . Prema tome je moguće prikazati potpuni diferencijal brzine kao:

$$D\vec{u}^{n+1} = \begin{cases} \vec{u}^* - \vec{u}^n & \text{za } q = 1 \\ \frac{3}{2}\vec{u}^* - 2\vec{u}^n + \frac{1}{2}\vec{u}^{n-1} & \text{za } q = 2 \end{cases}$$

te faktor diferencijacije kao:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{za } q = 1 \\ 3/2 & \text{za } q = 2 \end{cases}$$

Inkrementalne projekcijske metode u obzir uzimaju i tlak iz prethodnog koraka:

$$p^* = \begin{cases} 0 & \text{za } r = 0 \\ p^n & \text{za } r = 1 \end{cases}$$

a rotacijska projekcijska metoda [17] uz to uzima u obzir i dodatni član:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{za rotacijsku projekcijsku metodu} \\ 0 & \text{za ostale slučajeve} \end{cases}$$

Generalizirani modificirani tlak glasi:

$$\phi^{n+1} = p^{n+1} - p^* + \chi \mu \nabla \cdot \vec{u}^* \quad (4.1)$$

Predviđajući korak može se zapisati na sljedeći način:

$$\frac{D\vec{u}^{n+1}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{u}^n) + \vec{g} \quad (4.2)$$

odakle se eksplicitno izračuna pomoćno polje brzina  $\vec{u}^*$ .

Poissonovu jednadžbu općenito je moguće zapisati kao:

$$\nabla^2 \phi^{n+1} = \frac{\beta \rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}^* \quad (4.3)$$

i iz nje se izračuna modificirani tlak. Tlak  $p^{n+1}$  moguće je jednostavno dobiti iz jednadžbe (4.1).

Ispravljanje pomoćnog polja brzina moguće je zapisati kao:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* - \frac{\Delta t}{\beta \rho} \nabla \phi^{n+1} \quad (4.4)$$

odakle se dobije solenoidalno polje brzina koje služi za napredovanje položaja čestica. U tablici 4.1 dan je prikaz projekcijskih metoda u ovisnosti o  $q$ ,  $r$  i  $\chi$ .

Tablica 4.1: Projekcijske metode

$r$	$q$	$\chi$	Naziv metode
0	1	0	Homogena 1. reda
0	2	0	Homogena 2. reda
1	1	0	Standardno inkrementalna 1. reda
1	2	0	Standardno inkrementalna 2. reda
1	1	1	Rotacijsko inkrementalna 1. reda
1	2	1	Rotacijsko inkrementalna 2. reda

## 4.2 SPH formulacije

Standardno se koristi asimetrični oblik gradijenta tlaka (2.26) koji osigurava očuvanje količine linearnog gibanja i automatski regulira čestice. Dakle, gradijent tlaka dan je u asimetričnom obliku kao:

$$\left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right)_a = \sum_{b \in N} m_b \left( \frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \nabla W_{ab} \quad (4.5)$$

Divergencija vektorskog polja brzina, koju je potrebno poznavati u Poissonovoj jednadžbi (4.3), je dana u simetričnom obliku kao:

$$\nabla \cdot \vec{u}_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_{b \in N} m_b (\vec{u}_b - \vec{u}_a) \cdot \nabla W_{ab} \quad (4.6)$$

Morris [7] je aproksimirao faktor laminarne viskoznosti kombinirajući SPH metodu i metodu konačnih razlika, korištenjem samo prve derivacije jezgrene funkcije:

$$\nu \nabla^2 \vec{u}_a = \frac{2\mu}{\rho_a} \sum_{b \in N} V_b \frac{\vec{x}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}}{|\vec{x}_{ab}|^2 + \eta^2} (\vec{u}_a - \vec{u}_b) \quad (4.7)$$

gdje je  $\vec{x}_{ab} = \vec{x}_a - \vec{x}_b$ , a  $\eta$  je mali broj, obično se uzima vrijednost  $0,1h$ , kako bi se izbjegao nul nazivnik.

Analogno je dan i Laplaceov operator za tlak:

$$\nabla^2 \phi_a = 2 \sum_{b \in N} V_b \frac{\vec{x}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}}{|\vec{x}_{ab}|^2 + \eta^2} (\phi_a - \phi_b) \quad (4.8)$$

### 4.3 Rubni uvjeti

Zbog Langrangeove prirode SPH metode, implementacija rubnih uvjeta nije izravna kao kod metoda s definiranom mrežom. Kod SPH metode općenito postoje tri načina opisivanja krutih stijenci: metoda odbojnih sila, zrcaljenih čestica i prividnih čestica.

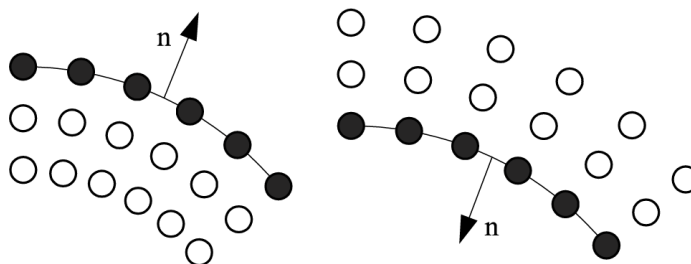
Za metodu odbojnih sila, jedan sloj čestica je postavljen na liniju stijenske. Čestice posjeduju vrlo jake odbojne sile kako bi se onemogućila penetracija čestica fluida kroz stijenk. Iako ova metoda ima prednost uštede memorije i vremena proračuna, s njom je nemoguće stvarno zadovoljiti homogeni Neumannov uvjet za tlak [19].

Metoda zrcaljenih čestica zahtjeva generiranje čestica u svakom vremenskom koraku. Kada je čestica fluida blizu stijenske, generira se osno-simetrična čestica u odnosu na tangentu stijenske, koja ima jednaku gustoću i tlak, ali brzinu suprotnu originalnoj čestici [7]. Ne prestano generiranje čestica komplicira paralelnu implementaciju. Povrh toga, modeliranje kompleksnih, a pogotovo oštih konkavnih oblika predstavlja veliki problem.

Opisivanje stijenci prividnim česticama (eng. *dummy particle*) uveo je Koshizuka [20] za MPS metodu te je kasnije široko prihvaćena za ISPH metodu [21, 22, 23], jer daje točnije rezultate nego ostale metode [24]. Sloj čestica postavljen je na liniju stijenske, a nekoliko dodatnih slojeva prividnih čestica postavljeni su unutar krute stijenske kako bi implicitno narinuli Neumannov uvjet. Čestice su generirane na početku simulacije i položene u suprotnom smjeru od smjera normale stijenske. One imaju jednaku vrijednost tlaka i brzine kao i odgovarajuće čestice na stijeci. Broj potrebnih dodatnih slojeva određen je polumjerom domena utjecaja jezgrene funkcije  $r_{max}$ . "Statičnost" metode pogoduje jednostavnoj

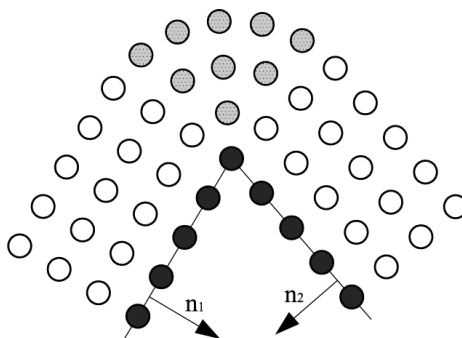
paralelnoj implementaciji.

Ne postoji standardni način generiranja prividnih čestica oko zaobljenih stijenki ili kuteva stijenki koji dokazano najtočnije nameće Neumannov rubni uvjet. U trenutku pisanja ovog rada, to je problem na kojem se mnogo radi [10, 23, 25, 26]. Prividne čestice zaobljenih stijenki najčešće se generiraju jednako kao i kod ravnih stijenki što je prikazano slikom 4.1. U slučaju veće zakrivljenosti potrebno je paziti na što manje odstupanje udaljenosti čestica na krivulji od euklidske udaljenosti.



Slika 4.1: Raspored prividnih čestica zaobljenih stijenki (crno - čestice stijenki, bijelo - prividne čestice stijenki)

Za proizvoljni kut u kojem se događa strujanje, javlja se pitanje na koji način ispuniti prazninu iza spojnice dviju stijenki. Na slici 4.2 prikazan je predloženi način generiranja čestica preko dužine luka kuta između dvije normale na spoju.



Slika 4.2: Raspored prividnih čestica za rub s unutarnjim tokom (crno - čestice stijenki, bijelo - prividne čestice stijenki, sivo - prividne čestice spojnice stijenki)

Za proizvoljni kut oko kojeg se događa strujanje, javlja se problem miješanja prividnih čestica spojenih stijenki. U tom slučaju se simetrala kuta uzima kao granica koja dijeli pripadnost prividnih čestica dviju stijenki.

Lastwika *et al.* [27] implementirali su dotjecanje za stlačivo strujanje povezujući zonu dotoka s domenom proračuna. Čestice unutar zone dotoka sadržavaju karakteristike kako bi se zadovoljio analitički rubni uvjet na ulazu. Tako bi npr. za razvijeno Poiseuilleovo strujanje

odgovarao parabolični profil brzine. Granica dotoka mora biti ravnina, a jednosmjerno strujanje okomito na nju. Zona dotoka je spojena s domenom strujanja i duljine je polumjera domene utjecaja jezgrene funkcije  $r_{max}$ . Međutim, mnoge simulacije do danas zamijenile su uvjete dotoka i istjecanja s periodičnim strujanjem [23, 7] zbog lagane implementacije. Čestice koje izlaze kroz definiranu granicu jednostavno su umetnute na početak, noseći jednake karakteristike.

## 4.4 Rješavanje Poissonove jednadžbe tlaka

Diskretizirani oblik Poissonove jednadžba tlaka (4.3) prema (4.8) i (4.6) predstavlja linearan sustav jednadžbi  $\sum_{b \neq a} A_{ab} (\phi_a - \phi_b) = b_a$ , odnosno  $\sum_b A_{ab} \phi_b = b_a$ , koji se može zapisati kao:

$$\dots \phi_b A_{ab} + \dots \phi_a A_{aa} + \dots + \phi_c (A_{ac} + A_{ad} + \dots) = b_a \quad (4.9)$$

gdje su  $a$  i  $b$  čestice fluida,  $c$  je čestica krute stijenke, a  $d$  je prividna čestica koja ima jednaki tlak kao i čestica  $c$ .

Linearan sustav zapisan u matričnom obliku glasi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Prema jednadžbi (4.8), koeficijenti matrice  $\mathbf{A}$  za čestice fluida dani su izrazom:

$$\mathbf{A}_{ab} = \begin{cases} 2V_b \frac{\vec{x}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}}{|\vec{x}_{ab}|^2 + \eta^2} & \text{za } a \neq b \\ -\sum_{b \in N} \mathbf{A}_{ab} & \text{za } a = b \end{cases} \quad (4.10)$$

a prema jednadžbi (4.6), elementi vektora  $\mathbf{b}$  dani su kao:

$$\mathbf{b}_a = \frac{\beta}{\Delta t} \sum_{b \in N} m_b (\vec{u}_b^* - \vec{u}_a^*) \cdot \nabla W_{ab} \quad (4.11)$$

Rubne uvjete potrebno je narinuti izmjenjujući koeficijente matrice  $\mathbf{A}$  i vektora  $\mathbf{b}$  kako je opisano u narednim poglavljima.

### 4.4.1 Neumannov uvjet

Kao što je opisano u poglavlju 4.3, Neumannov rubni uvjet (3.10) se implicitno primjenjuje pomoću čestica krutih stijenki i prividnih čestica. Prividne čestice sudjeluju u svim SPH formulacijama za čestice fluida, ali se za njih ne riješava Poissonova jednadžba. Čestice krutih stijenki su uključene u sustav linearnih jednadžbi i njihovi koeficijenti matrice  $\mathbf{A}$  tvore

se jednako kao za čestice fluida, osim činjenice da u obzir uzimaju samo međudjelovanje s česticama fluida. Nakon dobivanja vrijednosti tlakova u položajima čestica fluida i krutih stijenki iz Poissonove jednadžbe, prividne čestice preuzimaju vrijednost tlaka koje nose odgovarajuće čestice krute stijenke. Tako prividne čestice imaju važan utjecaj pri izračunu gradijenta tlaka u jednadžbi (4.5), čime vektorsko polje brzina postaje solenoidalno pomoću izraza (4.4).

#### 4.4.2 Dirichletov uvjet

U simulacijama sa slobodnom površinom na čestice koje su identificirane kao čestice slobodne površine, potrebno je narinuti Dirichletov uvjet  $p = 0$ , kako bi sustav dao netrivialno rješenje. Navedeni uvjet se može strogo postići jednostavno modifikacijom linearnog sustava na slijedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ab} &= \begin{cases} 0 & \text{za } a \neq b \\ 1 & \text{za } a = b \end{cases} \\ \mathbf{b}_a &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Međutim, Bockmann *et al.* [28] su predložili manje strogu implementaciju Dirichletov uvjeta kako bi poboljšali svojstva formulacije gradijenta tlaka (4.5) te izbjegli nakupljanje grupica čestica u blizini slobodne površine. Ako iz uvjeta  $p_a = 0$  prema jednadžbi (4.8) vrijedi:

$$\varepsilon \cdot \phi_a \cdot 2 \sum_{b \in N} V_b \frac{\vec{x}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}}{|\vec{x}_{ab}|^2 + \eta^2} = 0 \quad (4.13)$$

onda zbrajanjem jednadžbi (4.8) i (4.13) konstanta  $\varepsilon$  određuje relativni značaj zadovoljenja Dirichletovog uvjeta u sustavu (4.3). Empiričkim istraživanjem pokazano je da  $\varepsilon = 1$  daje zadovoljavajuće rezultate [28]. Prema tome, čestice slobodne površine imaju izmjenjenu dijagonalu matrice koeficijenata  $\mathbf{A}$  kako slijedi:

$$\mathbf{A}_{aa} = -2 \sum_{b \in N} \mathbf{A}_{ab} \quad (4.14)$$

Granica fluida je određena pomoću vrijednosti  $\nabla \cdot \vec{r}$  bez upotrebe korekcije gradijenta jezgrene funkcije:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \sum_{b \in N} V_b (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \cdot \nabla w_{ab} \quad (4.15)$$



Za česticu unutar fluida jednadžba (4.15) u 2D slučaju daje vrijednosti oko 2,0, a u 3D slučaju oko 3,0. Čestice blizu slobodne površine daju izračunate vrijednosti manje od navedenih, tako da standardne rubne vrijednosti za provjeru iznose u 2D slučaju 1,5, a u 3D slučaju 2,4. Iako ova metoda nije apsolutno precizna, pogrešan sud prilikom utvrđivanja slobodne površine kod nekih čestica ne rezultira značajnim odstupanjima konačnih rezultata.

## 4.5 Vremenski korak

Stabilnost simulacije ovisna je o vremenskom koraku,  $\Delta t$ , koji može biti promijenjiv, ali ne smije biti prevelik. On ovisi o CFL uvjetu i uvjetu viskoznosti:

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_{CFL}, \Delta t_\nu) \quad (4.16)$$

Najveći dopušteni vremenski korak  $\Delta t_{CFL}$ , koji ovisi o CFL uvjetu dan je izrazom:

$$\Delta t_{CFL} = 0,2 \frac{\lambda}{u_{\max}} \quad (4.17)$$

gdje je  $u_{\max}$  vrijednost najveće brzine fluida tj. brzine trenutno najbrže čestice.

Najveći dopušteni vremenski korak  $\Delta t_\nu$ , koji ovisi o viskoznosti dan je izrazom:

$$\Delta t_\nu = 0,125 \frac{h^2}{\nu_{\max}} \quad (4.18)$$

gdje je  $\nu_{\max}$  najveća efektivna kinematička viskoznost u simulaciji, a za izoterman tok vrijedi  $\nu_{\max} = \nu = \text{konst.}$

## 4.6 Vlačna nestabilnost

Čestice se kreću po strujnicama kada su Navier-Stokesove jednadžbe točno riješene. Prema tome, vrlo vjerovatna pojava je nakupljanje čestica oko stagnacijskih točaka toka fluida koja se redovito događa na području negativnog tlaka, a ponekad i u drugim slučajevima. Ta nestabilnost uzrokovana je manom jezgrene funkcije te rezultira interpolacijskim greškama [29, 30]. Iz slike 2.2 prema prvoj derivaciji jezgrene funkcije, vidljivo je kako približavanje čestica do određene udaljenosti rezultira slabijim međusobnim utjecajem, umjesto jačim. Xu Rui [22] predlaže metodu ispravljanja čestica koja je ranije uvedena za metodu čestica u konačnim volumenima (FVPM). Pomak položaja čestice na ispravljeni položaj dan je

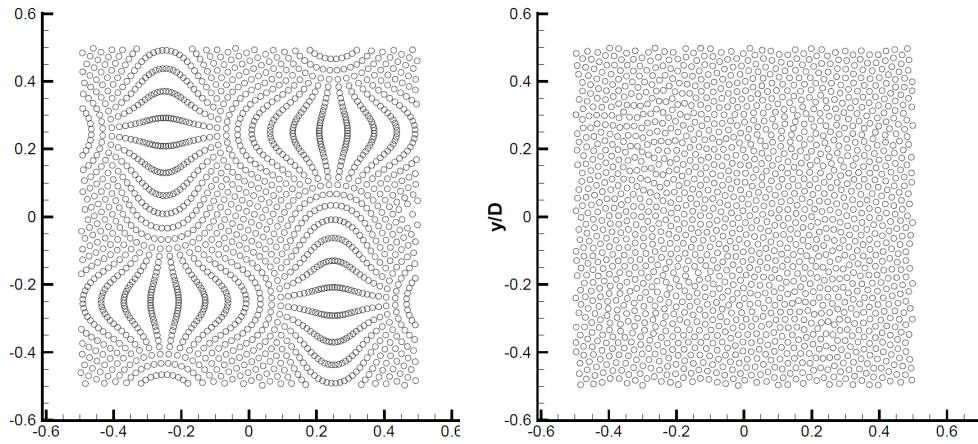
jednadžbom:

$$\delta \vec{r}_a = C |\vec{u}_a| \Delta t \left( \bar{r}_a^2 \sum_{b \in N} \frac{\vec{n}_{ab}}{r_{ab}^2} \right) \quad (4.19)$$

gdje je  $C$  proizvoljno odabrana konstanta najčešće postavljena u intervalu  $[0, 01; 0, 1]$ ,  $\vec{n}_{ab}$  je normirani vektor između položaja čestice  $a$  i  $b$ , a  $\bar{r}_a$  je osrednjena udaljenost u susjedstvu čestice  $i$ , dana izrazom:

$$\bar{r}_a = \frac{1}{N} \sum_{b \in N} r_{ab} \quad (4.20)$$

U jednadžbama (4.19) i (4.20) od čestica blizu slobodne površine samo čestice  $b$  koje su udaljene od čestice  $a$  manje od udaljenosti slobodne površine moraju biti razmatrane.



Slika 4.3: Raspored čestica u simulaciji vrtloženja Tylor-Green bez i sa ispravljanjem položaja čestica, prema [22]

Nakon pomaka čestica koji ispravlja distribuciju čestica u domeni fluida, potrebno je interpolirati hidrodinamičke parametre na novim položajima čestica. Tlak i komponente vektora brzine čestice korigirane su Taylorovim razvojem:

$$f_{a'} = f_a + (\nabla f)_a \cdot \delta \vec{r}_a + \mathcal{O}(\delta r_a^2) \quad (4.21)$$

gdje je  $f$  skalarno polje tlaka ili komponenti brzina.

Spomenutim pomicanjem čestica i korekcijom hidrodinamičkih varijabli čestice mogu "skakati" s jedne strujnice na drugu, čime se izbjegava nakupljanje čestica u grupice kao što je prikazano slikom 4.3, a time se i smanjuje greška uzrokovana narušenom distribucijom razmaka između čestica.

## 4.7 Programsko rješenje

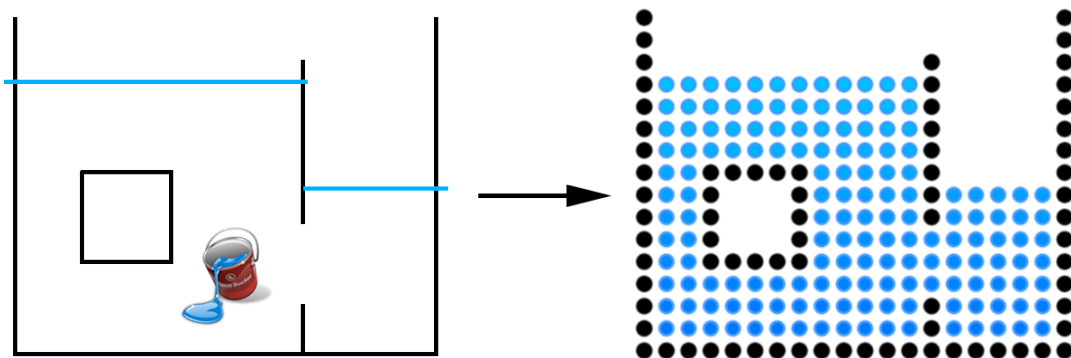
Implementacija je izvedena pomoću C++ programskog jezika i OpenCL standarda [31]. OpenCL (eng. *Open Computing Language*) je otvoreni standard za paralelno programiranje modernih više-jezgrenih (CPU, GPU itd.) procesora. Problem sustava čestica pogodan je za paralelno programiranje, a paralelno računanje različitih čestica rezultira višestrukim ubrzanjem u odnosu na serijsko izvođenje. Cijeli sustav isprogramiran je za općenitu upotrebu, a ne za specifične slučajeve: rješavač procesira ulazne podatke simulacijskog problema iz zadane XML datoteke koju izvodi i zapisuje rezultate u izlazne datoteke CSV ili VTK formata koje je moguće vizualizirati u većini modernih vizualizacijskih alata. Osim navedenih izlaznih formata, razvijen je i format za takozvane SPH sonde pomoću kojeg se zapisuje određeni parametar fluida na statičnoj koordinati.

Za potpuno definiranje simulacije, važniji ulazni podaci su:

- točnost računalnih realnih brojeva, 32 ili 64-bitna,
- izbor projekcijske metode kao što je opisano u poglavljima 3 i 4.1,
- zahtjevana točnost rješavača Poissonove jednadžbe tlaka (vidi Dodatak I),
- granice simulacijskog prostora i gravitacija,
- inicijalni razmak čestica  $\lambda$ , izbor jezgrene funkcije i duljine izgladivanja  $h$ ,
- parametri fluida: gustoća  $\rho$  i dinamička viskoznost  $\mu$ ,
- geometrija problema,
- vremenski interval simulacije  $t_{max}$  i vremenski korak  $\Delta t$ , koji može biti striktno odabran ili kontroliran kao što je opisano u poglavlju 4.5,
- izbor formata izlaznih datoteka i željenih parametara fluida,
- simulacijska vremena zapisivanja rezultata koja su definirana listom vremenskih trenutaka ili vremenskim korak  $\Delta t$ .

Geometriju problema koja je zadana kao skup osnovnih geometrijskih oblika ili krivulja, potrebno je pretvoriti u čestice s inicijalnim razmakom  $\lambda$ . Rubne stijenske vrlo je lagano pretvoriti u čestice, međutim fluid kao kontinuum nije omeđen samo krutim stijenkama već

i slobodnom površinom. Prema tome, uz definiranu geometriju stijenki i slobodnih površina, domena fluida je jednoznačno određena određujući bilo koju točku fluida unutar omeđenog prostora. Implementacija je izvršena algoritmom poplavlivanja (eng. *flood fill algorithm*), a cijelokupni proces je prikazan na slici 4.4.



Slika 4.4: Pretvorba geometrije problema u diskretizirani skup čestica

Simulacijski prostor definiran je pravokutnikom u 2D slučaju, odnosno pravokutnim paralelopipedom u 3D slučaju. Taj prostor je virtualno uniformno podijeljen na kvadratne, odnosno kockaste ćelije čije su stranice duljine  $r_{max}$ . Čestice koje se potencijalno nalaze u domeni utjecaja jezgrene funkcije oko položaja neke čestice sadržane su u samoj ćeliji te čestice i susjednim ćelijama.

Paralelizacija se provodi po česticama - za svaku česticu pokrene se jedan paralelni proces (eng. *thread*) koji traži čestice koje sudjeluju u SPH sumi te izračuna sumu i zapiše rezultat za traženu česticu. Takav pristup ne zahtjeva sinkronizaciju i komunikaciju između procesa koji rade paralelno te ne zahtjeva skladištenje popisa okolnih čestica. Zbog paralelizacije i ograničenosti alokacije memorijskog spremnika na GPU, podaci su spremljeni kao zasebni nizovi karakteristika (niz položaja, niz brzina itd.), umjesto kao nizovi struktura u kojoj bi bile sadržane sve karakteristike čestice. Traženje ekstremnih vrijednosti niza podataka, ili pak skalarnog produkta dvaju vektora izvršava se algoritmom zvanim paralelna redukcija (eng. *parallel reduction*).

Za svaku česticu izračuna se identifikacijski broj ćelije kojoj ona pripada. Niz podataka koji sadrži identifikacijski broj same čestice i njene ćelije sortira se s obzirom na broj ćelije. Sortiranje se provodi paralelnim *radix sort* ili *bitonic sort* algoritmom, ovisno o uređaju i veličini niza podataka. Tako se svakoj ćeliji simulacijskog prostora može dodijeliti podatak gdje se prva čestica koju ona sadrži nalazi u nizu podataka.

---

**Algoritam 1** Nestlačiva SPH metoda
 

---

Za  $t = 0, \dots, t_{max}$  s korakom  $\Delta t$  kontroliranim s jed. (4.16)

Pomakni čestice na privremene položaje  $\vec{r}_i^*$ , jed. (3.3)

Osvježi ćelije simulacijskog prostora

Pronađi čestice koje pripadaju slobodnoj površini iz jed. (4.15)

Izračunaj pomoćno polje brzina  $\vec{u}_i^*$  iz jed. (4.2)

Izradi matricu  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{b}$  prema izrazima iz poglavlja 4.4

Riješi (4.3) kao sustav jednačbi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Izračunaj solenoidalno polje brzina  $\vec{u}_i^{n+1}$ , jed. (4.4)

Pomakni čestice na nove položaje  $\vec{r}_i^{n+1}$ , jed. (3.9)

Ispravi položaje čestica radi izbjegavanja vlačne nestabilnosti, jed. (4.19)

---

Potrebno je napomenuti kako je izrada matrice  $\mathbf{A}$  komplicirana jer je matrica rijetka, a metode zapisivanja zahtjevaju preslagivanje memorije, što je paralelno teško kontrolirati, ili pak alociranje velike količine memorije. Iz tog razloga, produkt rijetke matrice i vektora  $\mathbf{Ax}$  vrši se paralelno i eksplicitno za svaki red tj. česticu; koeficijenti  $\mathbf{A}_{ab}$  računaju se iznova kad god je to potrebno.

## 5 Verifikacija i validacija metode

Verifikacija je proces provjere ispravnosti matematičkog modela koji opisuje određeni fizički fenomen, dok validacija označava proces ocjenjivanja točnosti opisa stvarnog stanja predloženim modelom.

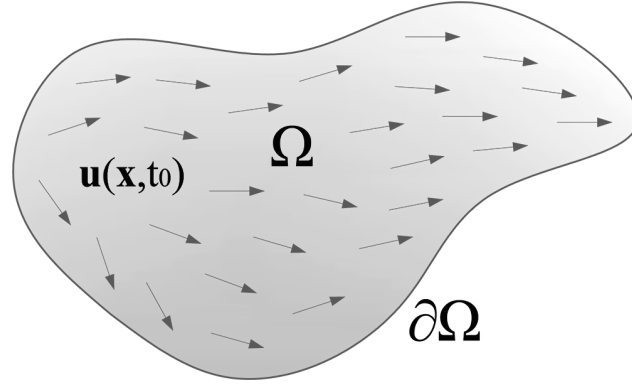
U nastavku su opisani testovi pomoću kojih je trenutna ISPH implementacija verificirana i validirana. Rezultati simulacija uspoređeni su s dostupnim analitičkim, već validiranim numeričkim ili pak eksperimentalno dobivenim rezultatima dostupnim iz literature. Testovi uključuju različite simulacije:

- tekućine čija je domena omeđena slobodnom površinom, a okružena vakuumom,
- strujanja tekućine u zatvorenim sustavima, bez slobodne površine,
- strujanja tekućine sa slobodnom površinom pod utjecajem gravitacije,
- impulzivnih sudara tekućine s krutim stijenkama,
- impulzivnih sudara krutih tijela s tekućinom.

Svi testovi simulirani su klasičnom homogenom projekcijskom shemom. Nigdje nije korišteno ispravljanje gradijenta jezgrene funkcije, dok je ispravljanje položaja čestica, koje je opisano u poglavlju 4.6, bilo korišteno u simulacijama gdje se pojavilo negativno polje tlaka. Ukoliko nije specifično naglašeno, korištena je spline jezgrene funkcija petog reda, s duljinom izgladivanja iznosa  $h = 1, 2\lambda$ .

### 5.1 Deformacija fluida bez vanjskih utjecaja

Razmatran je fluid na koji ne djeluje gravitacijska niti bilo koja druga vanjska sila. Problem je opisan slikom 5.1 koja prikazuje domenu fluida  $\Omega$  koja je okružena vakuumom te podvrgnuta inicijalnoj promjeni polja brzina  $\vec{u}_0(x, y)$ , uslijed čega dolazi do deformacije fluida u ovisnosti o vremenu. Granica fluida  $\partial\Omega$  je slobodna površina koja zadovoljava kinematički rubni uvjet, koji kaže da će inicijalne čestice na granici nakon pomaka ostati na njoj, te dinamički rubni uvjet koji kaže da tlak na granici iščezava. Početni uvjet tvori solenoidalno polje brzina, prema kojem se fluid u vremenu razvija zadovoljavajući Poissonovu jednadžbu.



Slika 5.1: *Fluid s početnim poljem brzina, okružen vakuumom*

Ovakvi problemi su prikladni za istraživanje učinkovitosti rješavača nestlačivog i neviskoznog fluida, jer su jednostavni za ispitivanje i uspoređivanje s analitičkim rezultatima. Proučena su tri slučaja koja koristi Colagrossi [32], a u kojima se inicijalno kružna ili kvadratna kapljica fluida slobodno razvija u vremenu prema zadanim početnim uvjetima. Početni uvjeti promatranih slučajeva čine: rastezanje, rotacija i nejednoliko vrtloženje domene fluida. U nastavku je dana validacija navedenih problema uspoređujući rezultate ISPH metode s rezultatima koji su dobiveni analitičkim ili već verificiranim numeričkim putem.

### 5.1.1 Rastezanje inicijalno kružne kapljice

U početnom vremenskom trenutku domena fluida  $\Omega$  je krug polumjera  $R$ , u koji je postavljeno početno polje brzina:

$$\vec{u}_0(x, y) = \langle -A_0 x, A_0 y \rangle \quad (5.1)$$

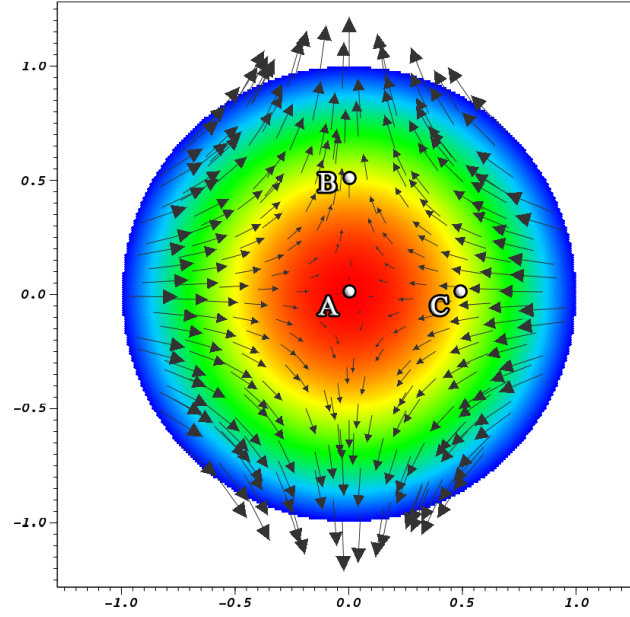
Početno polje brzina je bezvrtložno, te ostaje bezvrtložno tijekom cijelog razvoja kapljice, tj. u svakom vremenskom trenutku  $t$  vrijedi  $\nabla \times \vec{u} = 0$ .

Prema zadanom početnom uvjetu kapljica zadržava formu elipse, a njene čestice se gibaju prema sljedećem zakonu:

$$\vec{x}(t) = \left\langle \frac{a(t)}{R} X, \frac{b(t)}{R} Y \right\rangle \quad (5.2)$$

gdje su  $a(t)$  i  $b(t)$  vrijednosti male i velike poluosi elipse koju ocrta granica fluida  $\partial\Omega$ , a  $X$  i  $Y$  su početne koordinate čestice. Nepoznanice  $a(t)$  i  $b(t)$  mogu se odrediti polu-analitički na sljedeći način. Deriviranjem jednadžbe gibanja (5.2) po vremenu dobije se polje brzina:

$$\vec{u}(x, y, t) = \left\langle \frac{\dot{a}}{a} x, \frac{\dot{b}}{b} y \right\rangle \quad (5.3)$$



Slika 5.2: Kružna kapljica s kvalitativno prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina

koje je linearno u bilo kojem vremenskom trenutku. Prema zakonu o očuvanju mase, umnožak poluosi  $ab$  mora ostati konstantan, što podrazumijeva  $(ab)' = \dot{a}b + \dot{b}a = 0$ . Uvodeći funkciju  $A(t) = -\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b}$ , polje brzina glasi:

$$\vec{u}(x, y, t) = \langle -A(t)x, A(t)y \rangle \quad (5.4)$$

s početnim uvjetom  $A(0) = A_0$ . Polje brzina je očito solenoidalno u bilo kojem vremenskom trenutku  $t$ . Gradijent tlaka prema Eulerovoj jednadžbi glasi:

$$\nabla p = \left\langle -\rho \left( -\dot{A}x + A^2x \right), -\rho \left( \dot{A}y + A^2y \right) \right\rangle \quad (5.5)$$

Ako točka s koordinatama  $(a, 0)$  pripada slobodnoj površini  $\partial\Omega$  na kojoj tlak iščezava, rješenje jednadžbe (5.5) je dano izrazom:

$$p(x, y, t) = \frac{1}{2} \rho \left[ \dot{A}(x^2 - y^2) - A^2(x^2 + y^2) - a^2(\dot{A} - A^2) \right] \quad (5.6)$$

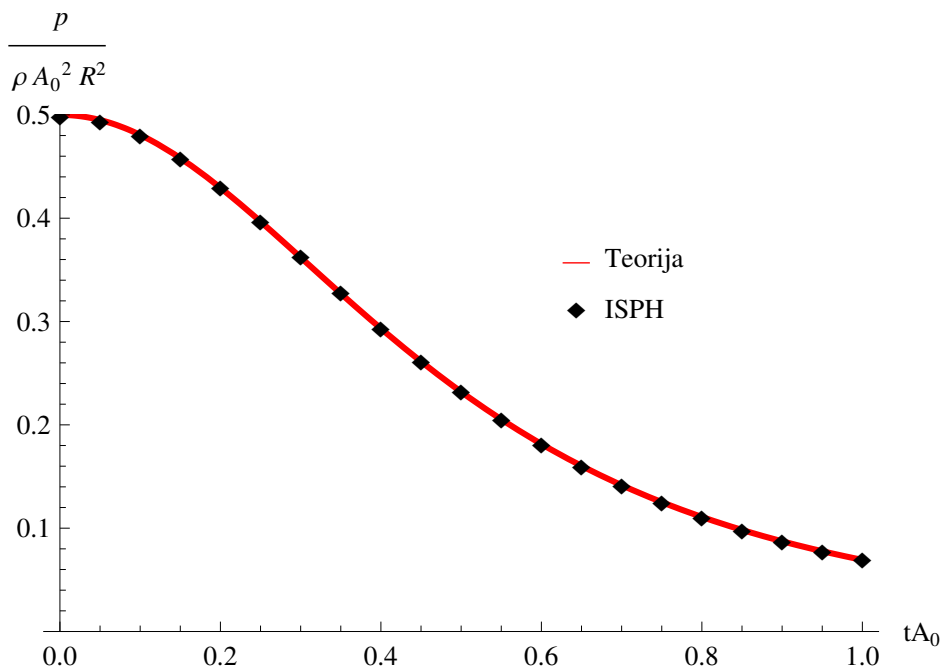
Diferencijalna jednadžba drugog reda s početnim uvjetima glasi:

$$\begin{cases} \ddot{A}A - 4\dot{A}^2 + 2A^4 = 0 \\ A(0) = A_0 \\ \dot{A}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

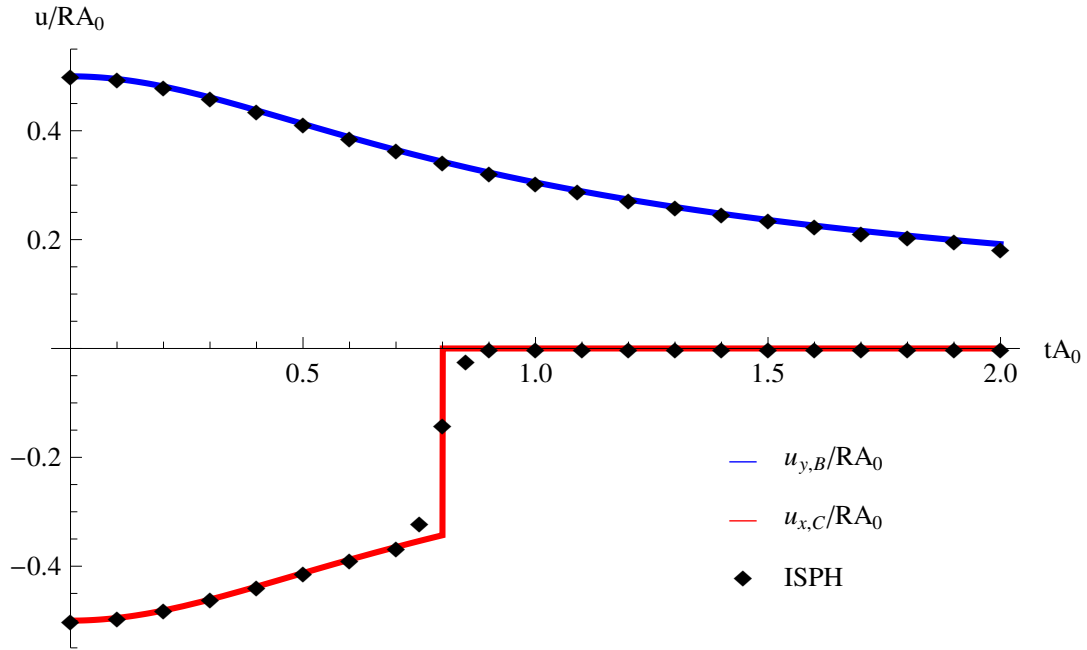


koju je potrebno riješiti numerički, npr. metodom Runge-Kutta četvrtog reda. Kada je dobiveno rješenje  $A(t)$ , iz  $a(t)$  i  $b(t)$  moguće je odrediti polje brzina i tlakova u bilo kojem vremenskom trenutku.

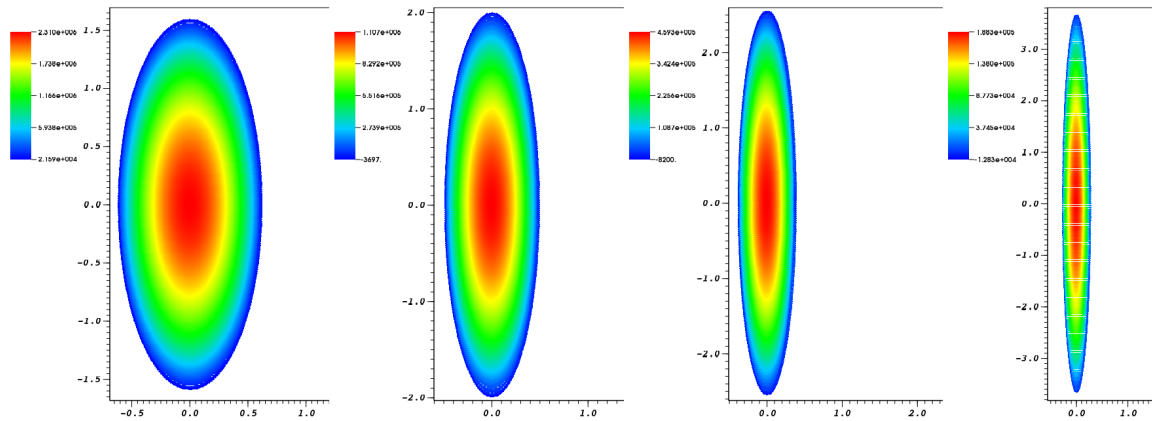
Razmatrana je kapljica jediničnog polumjera sa središtem smještenim u ishodištu koordinatnog sustava, gustoće  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Parametar inicijalnog polja brzina iznosi  $A_0 = 100 \text{ s}^{-1}$ . Diskretizirani model kapljice čini 30000 čestica koje su razmještene prema uzoru na uniformnu mrežu s razmakom  $\lambda = 0,01R$ . Simulacija je izvedena s konstantnim vremenskim korakom  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ . Na slici 5.3 dana je usporedba tlakova u središtu kapljice, a na slici 5.4 je dana usporedba veličina brzina na mjestica B i C (vidi sliku 5.2). Vrijednosti dobivene ISPH metodom odlično prate analitičke rezultate. Na slici 5.5 prikazan je razvoj kapljice u različitim vremenskim trenucima te je vidljivo kako je eliptični oblik kapljice očuvan tijekom cijele simulacije.



Slika 5.3: Usporedba vrijednosti tlaka u središtu eliptične kapljice koje su dobivene analitičkim putem i ISPH metodom



Slika 5.4: Usporedba vrijednosti vertikalne i horizontalne komponente brzine koje su dobivene analitičkim putem i ISPH metodom, na mjestima B i C



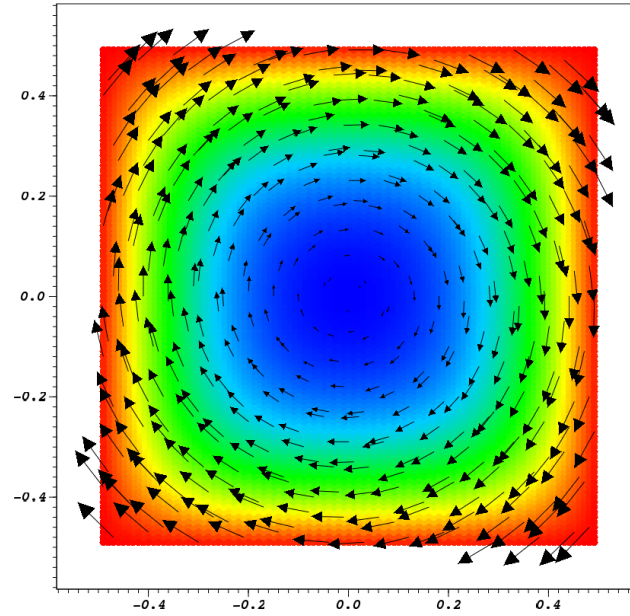
Slika 5.5: Razvoj kapljice u vremenskim trenucima  $tA_0 = 0,5; 0,8; 1,2; 2,0$  s prikazanim poljem tlaka

### 5.1.2 Rotacija inicijalno kvadratne kapljice

U početnom vremenskom trenutku domena fluida  $\Omega$  je kvadrat s duljinom stranice  $L$ , u koji je postavljen početno polje brzina:

$$\vec{u}_0(x, y) = \langle \omega y, -\omega x \rangle \quad (5.8)$$

gdje je  $\omega$  kutna brzina, što predstavlja rotaciju oko središta kvadrata.



Slika 5.6: Kvadratna kapljica s kvalitativno prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina

Ovaj problem se može izraziti preko Eulerove jednadžbe i početnog uvjeta na slijedeći način:

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \omega^2(\vec{x} - \vec{x}_0) - 2\vec{\omega} \times \vec{u} \\ \vec{u}(\vec{x}, t_0) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

gdje se na desnoj strani Eulerove jednadžbe javljaju dvije sile: centrifugalna i Coriolisova sila. Centrifugalna sila uzrokuje produživanje rubova kapljice u radijalnom smjeru, što rezultira izrastom četiri kraka na kapljici dok Coriolisova sila savija krakove u smjeru suprotnom od rotacije kapljice. Ovaj problem je vrlo teško rješiv analitičkim putem, te se pribjegava numeričkom rješenju tako da se prvo podijeli brzina strujanja na translacijsku i rotacijsku komponentu:

$$\vec{u} = \nabla\Phi - \vec{\omega} \times \vec{x} \quad (5.10)$$

kako bi se odredila skalarna funkcija  $\Phi$  translacijske komponente brzine, odnosno funkcija

potencijala brzine. Problem je moguće zapisati kao:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Laplace} & \nabla^2 \Phi = 0, \quad \vec{x} \in \Omega \\
 \text{dinamički r.u.} & \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 |\vec{x}|^2 + 2\omega \Psi, \quad \vec{x} \in \partial\Omega \\
 \text{kinematički r.u.} & \frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{U}_{\partial\Omega}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega
 \end{array} \tag{5.11}$$

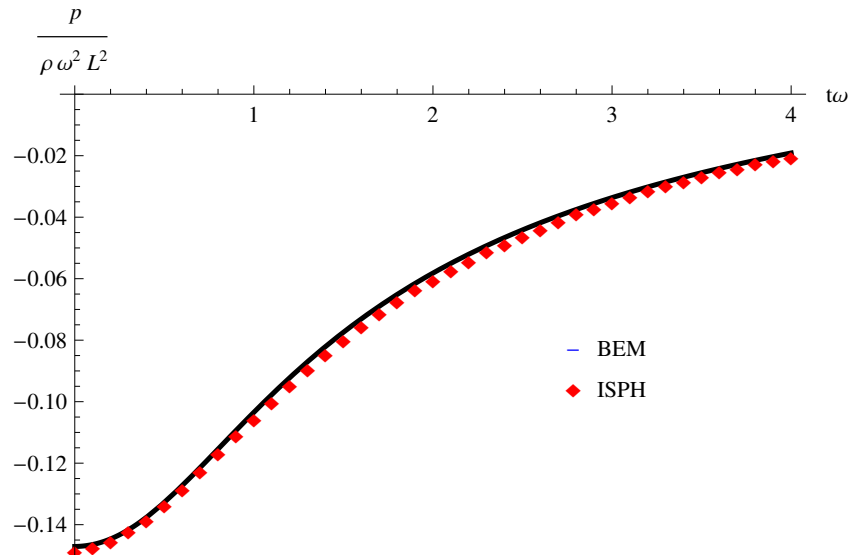
gdje je  $\Psi$  funkcija toka koja je povezana s potencijalom brzine na slijedeći način:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{5.12}$$

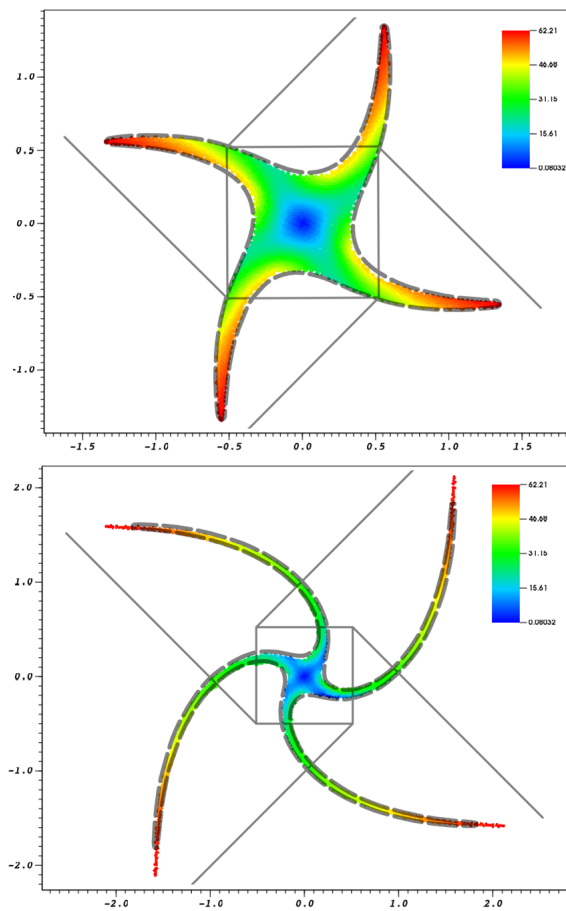
Problem se može formulirati preko rubnih integrala i numerički riješiti pomoću metode rubnih elemenata (BEM). BEM rješavač je jedan od najtočnijih za probleme slobodne površine, premda ne može podnijeti fragmentaciju slobodne površine, što ga čini logičnim izborom za ovaj problem.

U vezi razvoja strujanja, ovaj test je suprotan eliptičnoj kapljici, te se pojavljuju različite poteškoće. Razvoj eliptične kapljice bio je okarakteriziran pozitivnim poljem tlaka unutar domene fluida, što je dovodilo do horizontalne kompresije i vertikalne ekspanzije kapljice. U ovom slučaju, uslijed centrifugalne sile javlja se negativno polje tlaka koje uzrokuje velike deformacije i vlačnu nestabilnost [29].

Razmatrana je kapljica jedinične duljine stranice  $L = 1$ , sa središtem smještenim u ishodištu koordinatnog sustava. Parametar inicijalnog polja brzina iznosi  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ . Diskretizirani model kapljice sastoji se od 2500 čestica koje su razmještene prema uzoru na uniformnu mrežu s razmakom  $\lambda = 0,02L$ . Simulacija je izvedena s konstantnim vremenskim korakom  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ . Na slici 5.7 prikazan je bezdimenzionalni tlak u središtu kapljice. Vrijednosti koje su dobivene ISPH metodom u dobrom su slaganju s rezultatima dobivenim metodom rubnih elemenata. Na slici 5.8 prikazana je usporedba razvijenih slobodnih površina dobivenih ISPH metodom i metodom rubnih elemenata u dva različita vremenska trenutka. Prikazane kose linije označuju teorijsku putanju vrhova krakova. U vremenskom trenutku  $t\omega = 4$  vidljivo je kako ISPH metoda razvija nešto duže krakove nego metoda rubnih elemenata, koji bi bili još duži i bliži teorijskoj putanji da nije korišten viskozni fluid radi poboljšanja stabilnosti simulacije.



Slika 5.7: Vrijednosti tlaka u središtu rotacijske kapljice dobivene pomoću BEM i ISPH metode



Slika 5.8: Razvoj kvadratne kapljice s prikazanim poljem veličina brzina u vremenskim trenucima  $t\omega = 2,04$  i  $t\omega = 4$ . Usporedba slobodne površine dobivene BEM (iscrtkana linija) i ISPH metodom (oboјano).

### 5.1.3 Nejednoliki razvoj inicijalno kvadratne kapljice

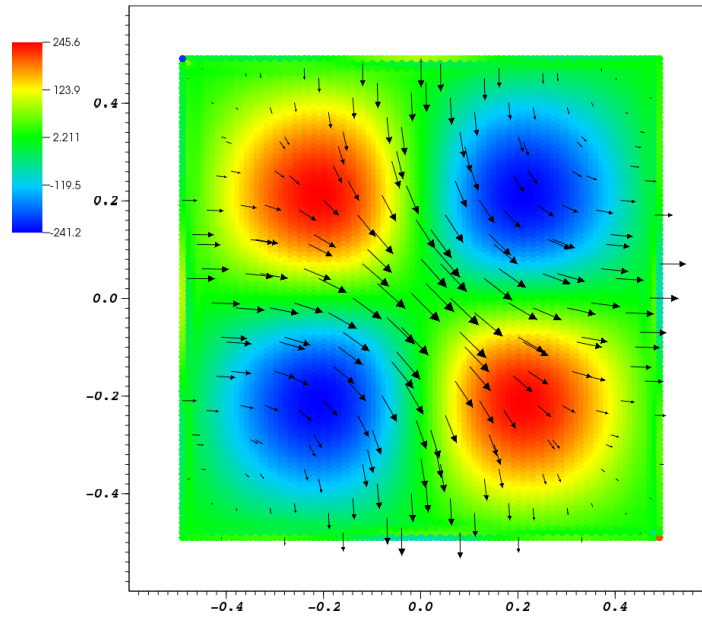
U početnom vremenskom trenutku domena fluida  $\Omega$  je kvadrat s duljinom stranice  $L$ , u kojoj je postavljeno nejednoliko polje brzina:

$$\vec{u}_0(x, y) = \langle V_0 f(y), -V_0 f(x) \rangle \quad (5.13)$$

gdje je  $f(x) = e^{-(4x/L)^2} - e^{-4}$ , a  $V_0$  je konstantna vrijednost. Polje opisano jednadžbom (5.13) podrazumijeva nejednoliko vrtloženje u domeni fluida, dano izrazom:

$$\nabla \times \vec{u}_0(x, y) = \frac{32V_0}{L^2} \left( x e^{-(4x/L)^2} + y e^{-(4y/L)^2} \right) \quad (5.14)$$

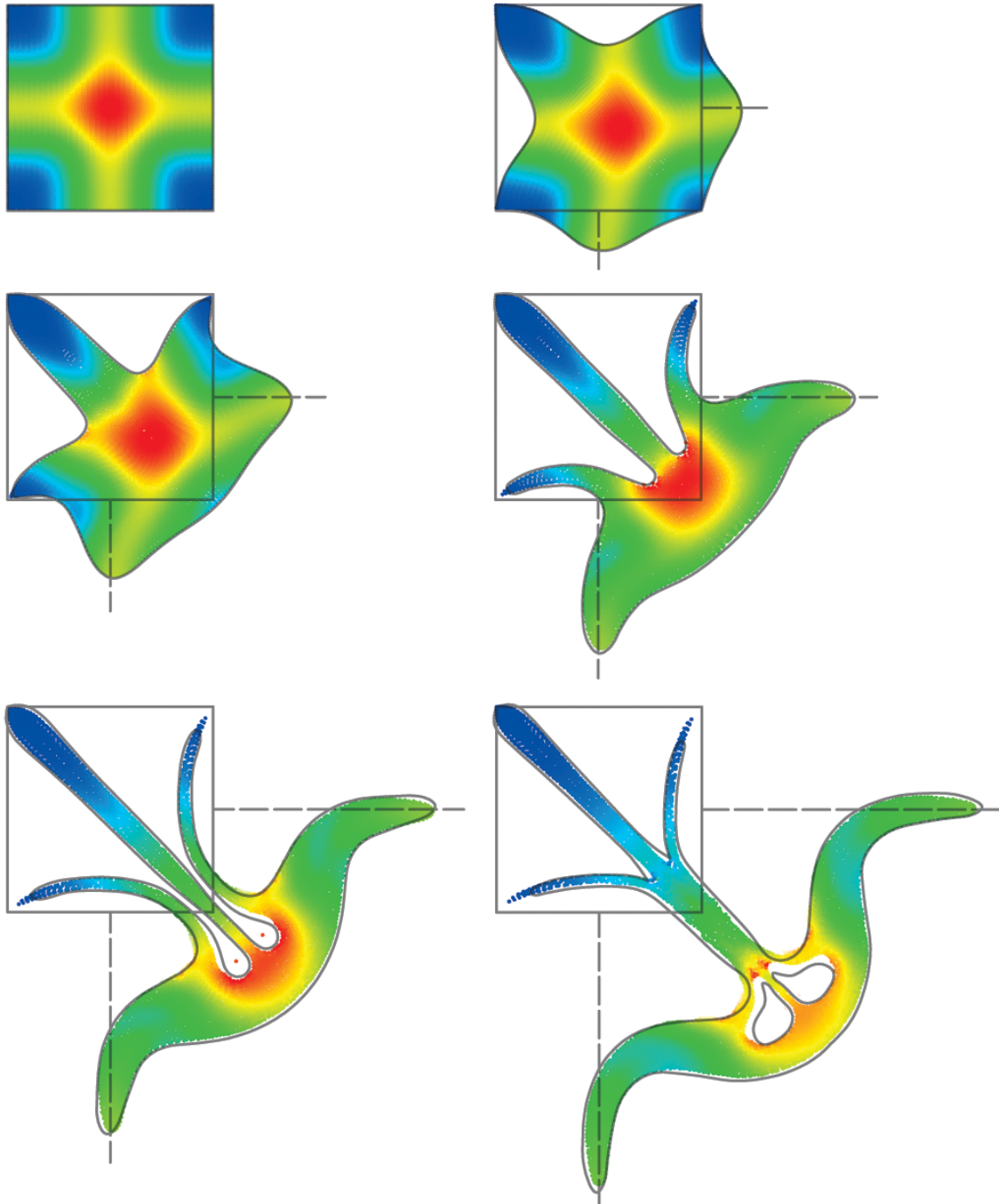
što rezultira složenom kinematikom strujanja, velikim deformacijama i sudaranju različitih dijelova slobodne površine. Takav problem nije pogodan za metodu rubnih elemenata te je rješenje Colagrossi [32] dobio pomoću kombinacije metode konačnih razlika (FDM) s Level-set algoritma (LSM) [33].



Slika 5.9: *Kvadratna kapljica s prikazanim inicijalnim poljem tlaka i vektorskim poljem brzina*

Razmatrana je kapljica jedinične duljine stranice  $L = 1$ , sa središtem smještenim u ishodištu koordinatnog sustava. Kutna brzina iznosi  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ . Diskretizirani model kapljice tvori 2500 čestica koje su razmještene prema uzoru na uniformnu mrežu s razmakom  $s = 0,013L$ . Simulacija je izvedena s konstantnim vremenskim korakom  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Na slici 5.10 prikazan je razvoj kvadratne kapljice simuliran SPH metodom i uspoređen s FDM/LSM

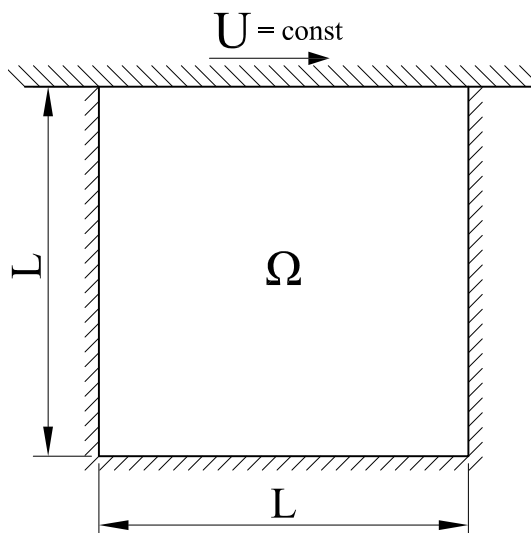
rješenjem koje je dobio Colagrossi [32]. Rezultati SPH metode odlično prate slobodnu površinu simuliranu s FDM/LSM metodom. Gornji desni i donji lijevi vrhovi ostaju statični, a vrhovi krakova koji se postepeno razvijaju ostaju na ordinatama čije je ishodište u središtu kvadrata.



Slika 5.10: *Nejednoliki razvoj kapljice s kvalitativno prikazanim veličinama brzina u vremenskim trenucima  $t\omega = 0; 0,2; 0,4; 0,8; 1,2; \text{ i } 1,5$ . Usporedba slobodne površine dobivene ISPH metodom (oboјano) i FDM/LSM metodom (crna linija) [32]*

## 5.2 Strujanje u šupljini potaknuto gibanjem gornje stijenke

Strujanje u šupljini ispunjenom tekućinom koje je potaknuto gibanjem gornje stijenke je jedan od najčešće korištenih primjera za verifikaciju novih metoda i kodova. Kvalitetni rezultati dobiveni višemrežnom (eng. *multigrid*) metodom za usporedbu dali su Ghia *et al.* [34] gdje su rezultati prikazani u tablicama za različite Reynoldsove brojeve. Šupljina u kojoj se nalazi tekućina kvadratnog je oblika, a tekućina se ubrzava izričito gibanjem gornje stijenke konstantnom brzinom do stabilnog režima strujanja. Šupljina potpuno ispunjena tekućinom nema slobodnu površinu. Uspoređivanje rezultata dobivenih ISPH metodom s onima dobivenih pomoću multigrid metode, koja je pogodna za probleme bez slobodne površine, je vrlo dobar pokazatelj svestranosti i točnosti SPH metode i njene implementacije.



Slika 5.11: Geometrija šupljine s pokretnom gornjom stijenkom

Reynoldsov broj se računa na poznati način:

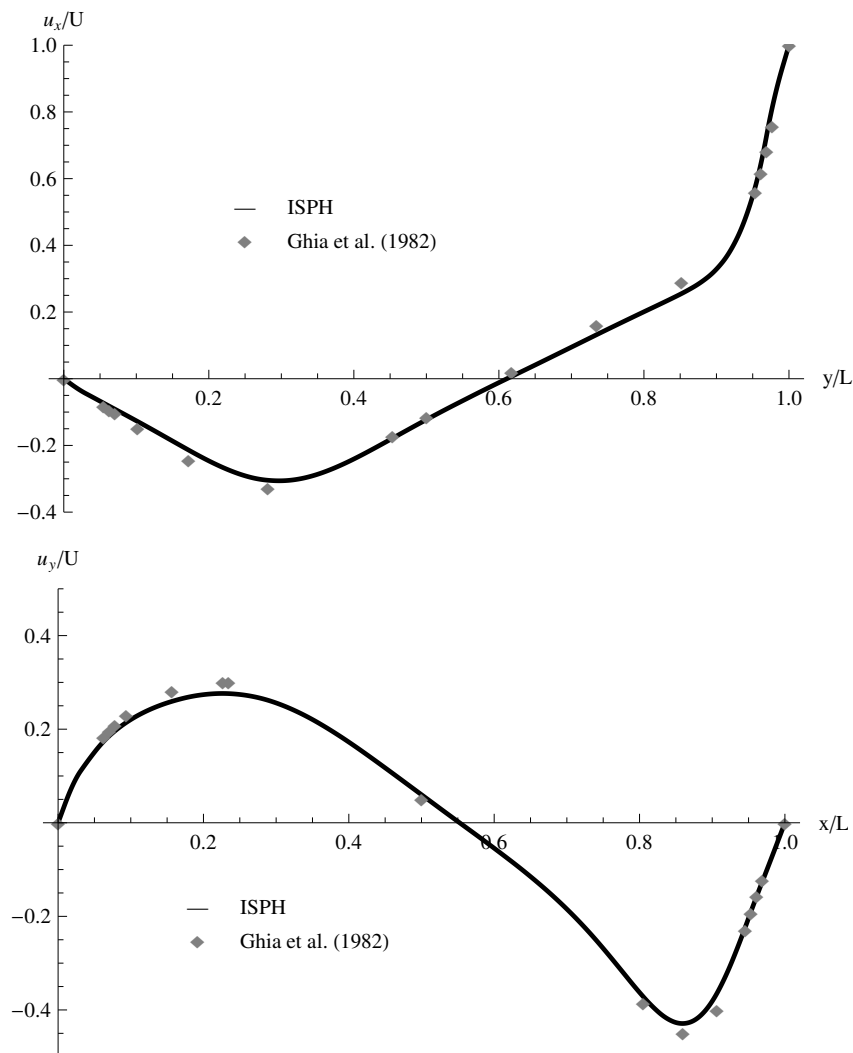
$$Re = \frac{U L}{\nu} \quad (5.15)$$

gdje je  $U$  brzina gibanja stijenke, a  $L$  je duljina stranice kvadratne šupljine. Navedene vrijednosti uzete su kao jedinične kako bi vrijedilo  $\nu = \frac{1}{Re}$ , tj. za jediničnu gustoću  $\mu = \frac{1}{Re}$ . Provedene su simulacije za  $Re = 400$  i  $Re = 1000$  i uspoređene su sa rezultatima iz literature [34]. Tako je za simulaciju pri  $Re = 400$  definirana dinamička viskoznost od  $\mu = 0,0025 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , a za simulaciju pri  $Re = 1000$  od  $\mu = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Inicijalni razmak čestica iznosio je  $\lambda = 0,01L$ , izrađujući tako domenu fluida s "mrežom" od  $98 \times 98$  čestica. Simulacija je provedena s konstantnim vremenskim korakom od  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ , sve dok se

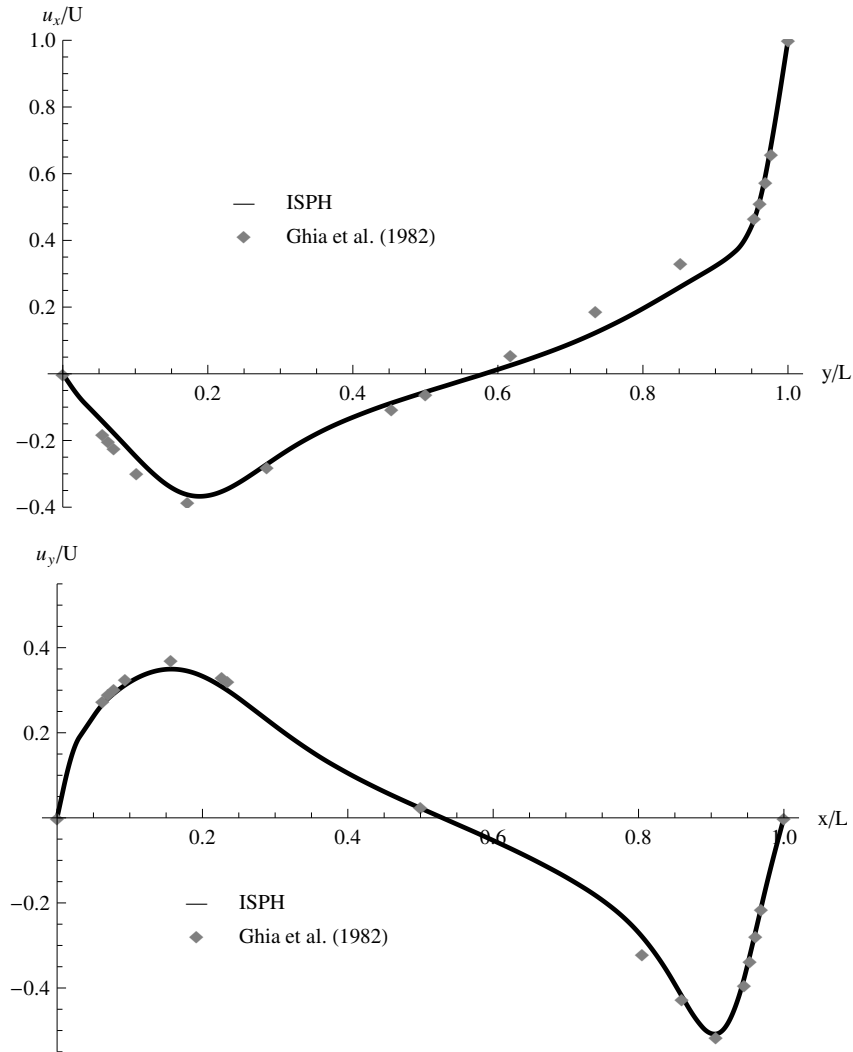


vektorsko polje brzina nije ustalilo.

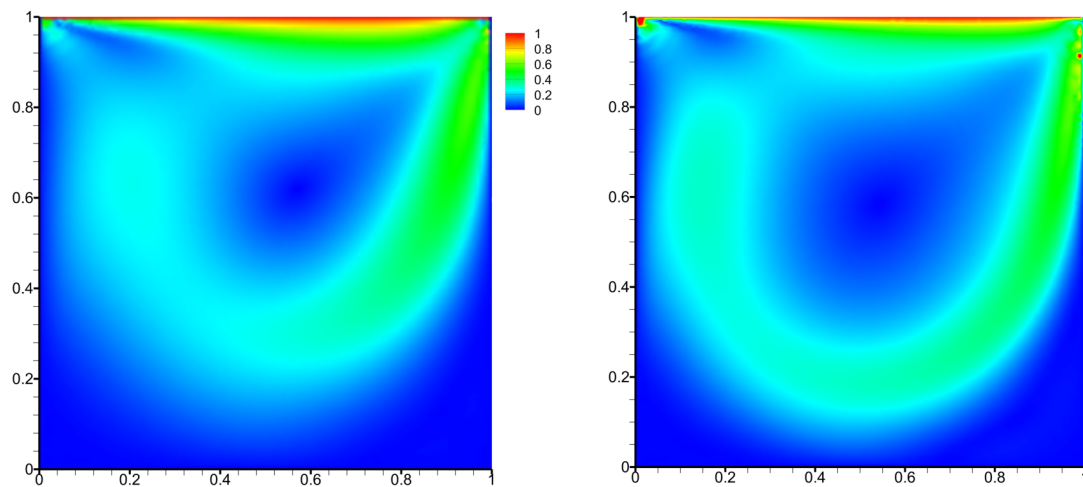
Na slikama 5.12 i 5.13 prikazani su rezultati horizontalnih komponenti brzina na vertikalnoj simetrali i vertikalnih komponenti brzina na horizontalnoj simetrali šupljine, koji su uspoređeni s referentnim vrijednostima. Rezultati ISPH metode su u odličnom slaganju s *multigrid* metodom uzimajući u obzir da je potonja stacionarna simulacija provedena na 127x127 ćelija, a da se povećavanjem broja čestica i poboljšavanjem ostalih parametara ISPH metoda približava rezultatima iz [34]. Na slici 5.14 su prikazana polja veličina brzina za simulirane Reynoldsove brojeve.



Slika 5.12: Horizontalne komponente brzine na vertikalnoj simetrali i vertikalne komponente brzine na horizontalnoj simetrali šupljine, za  $Re = 400$



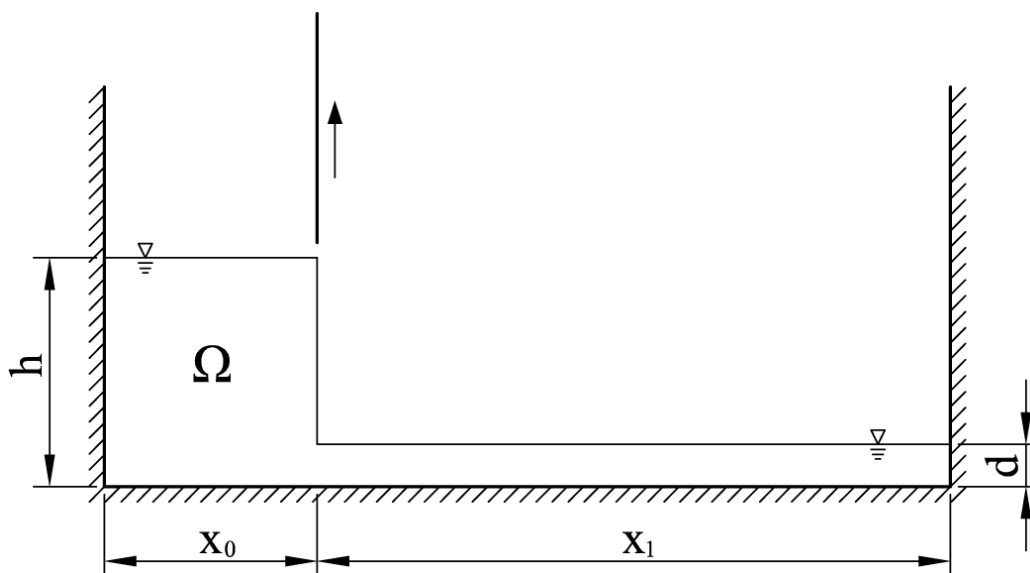
Slika 5.13: Horizontalne komponente brzine na vertikalnoj simetrali i vertikalne komponente brzine na horizontalnoj simetrali šupljine, za  $Re = 1000$



Slika 5.14: Ustaljena polja veličina brzina  $|\vec{u}|/U$  u trenutku  $t = 40$  s, za  $Re = 400$  i  $Re = 1000$

### 5.3 Pucanje brane

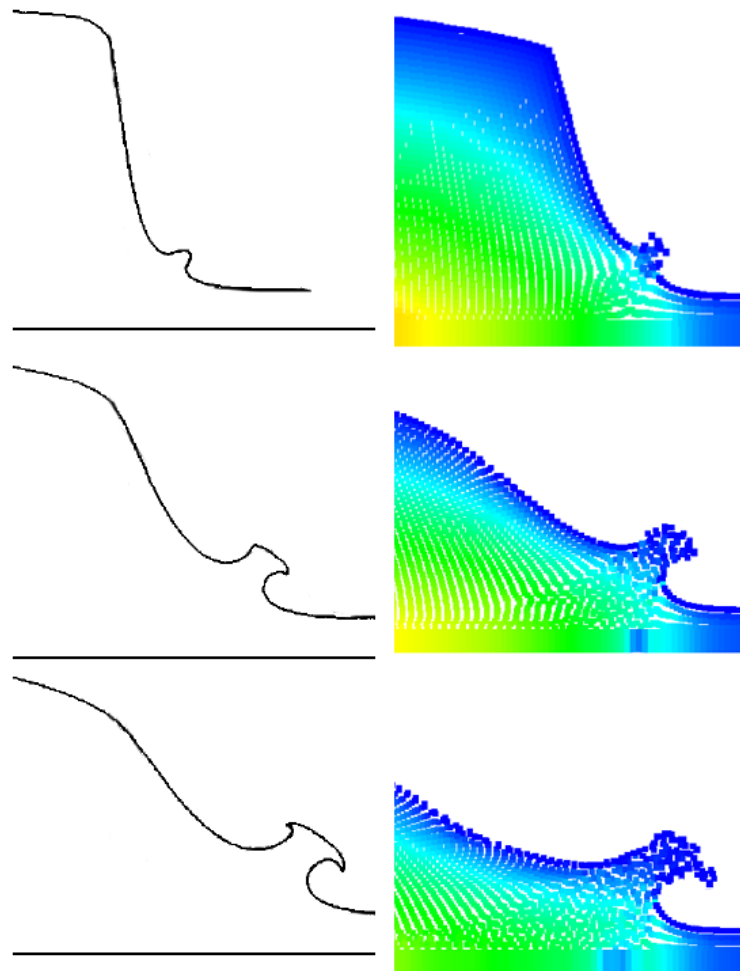
Strujanje vode nakon iznenadnog pucanja brane zanimljiv je primjer koji je shematski inicijalno prikazan kao pravokutni stup tekućine s jedne strane ograđen branom koja se pomakne ili jednostavno iščezne. Nakon pucanja brane, stup tekućine se pod utjecajem gravitacije ruši i prelijeva u mokro korito dubine  $d$ , ili pak suho korito  $d = 0$ , kao što je prikazano na slici 5.15. Ovaj problem je u velikoj mjeri numerički istražen [35, 37, 38], jer osim praktičnog značenja predstavlja vrlo dobar test kojim se može validirati metoda koja pokušava upravljati s velikim deformacijama slobodne površine. Osim numeričkih proračuna, provedeni su i brojni eksperimenti pucanja brane sa suhim i mokrim koritom [35, 38, 39].



Slika 5.15: Geometrija primjera pucanja brane s mokrim koritom. U slučaju suhog korita, na području  $x_1$  vrijedi  $d = 0$

#### 5.3.1 Inicijalni razvoj slobodne površine

Stansby *et al.* [35] su prilikom provođenja različitih eksperimenata pucanja brane zapazili kako dio slobodne površine formira oblik nalik na gljivu na početku strujanja. Proveli su nelinearnu analizu potencijalnog strujanja, na temelju kojih su dobili oblik slobodne površine na početku strujanja. Geometrija eksperimenta definirana je parametrima  $x_0 = 0,9$  m,  $h = 0,1$  m te  $d = 0,01$  m. Na slici 5.16 prikazana je usporedba slobodne površine dobivene ISPH metodom i analizom potencijalnog strujanja. Simulacija ISPH metodom je čak i pri većim razmacima između čestica proizvela navedeni fenomen, kao što je prikazano na slici 5.16.

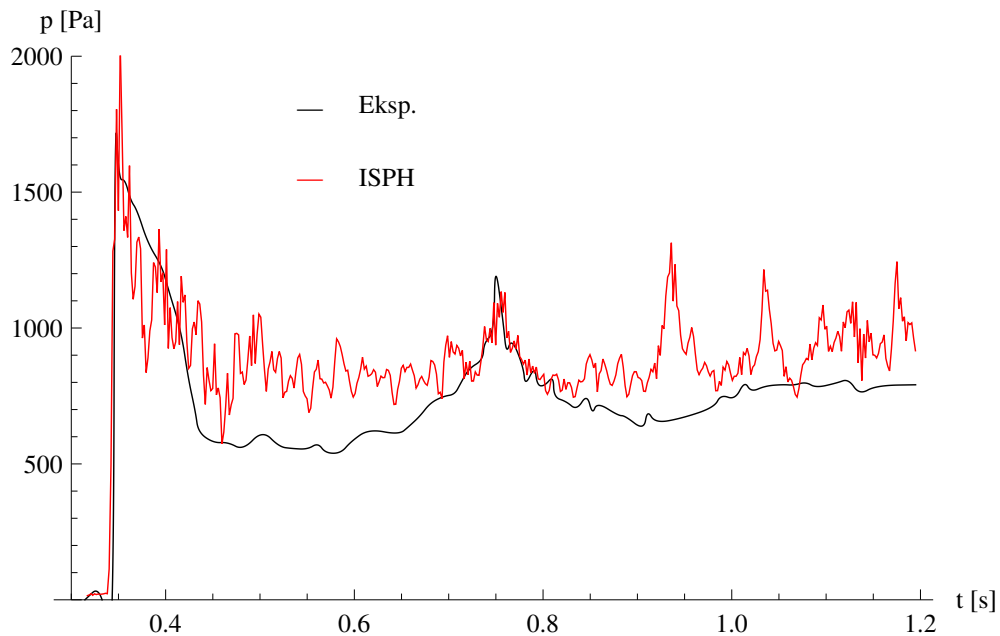


Slika 5.16: Usporedba inicijalnog razvoja slobodne površine dobivene ISPH metodom (obojano) i analizom potencijalnog strujanja (crna linija).

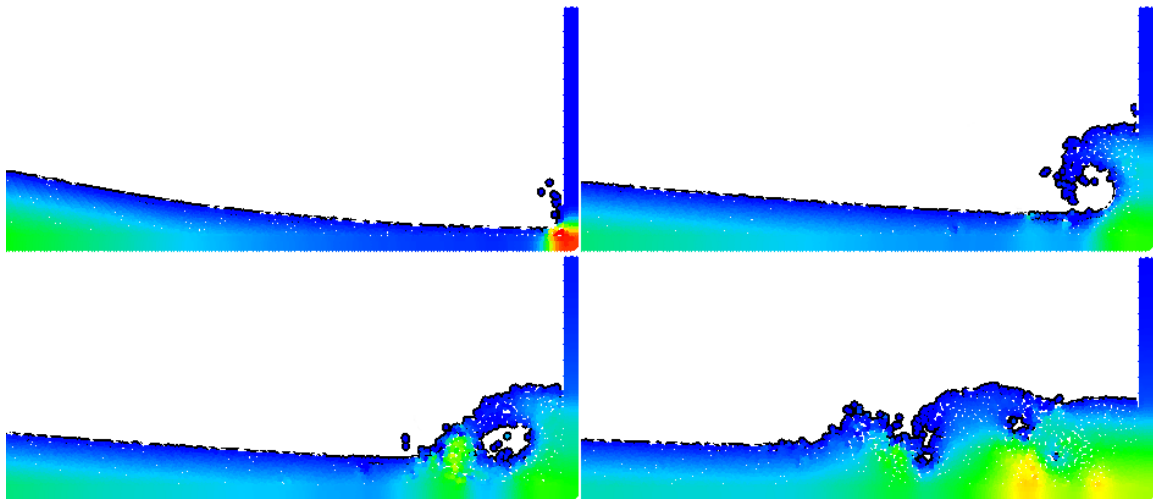
### 5.3.2 Udar vode u vertikalni zid

Numerički je simuliran eksperiment pucanja brane nad suhim koritom koji su izveli Hu i Kashiwagi [38]. Geometrija problema je definirana parametrima  $x_0 = 0,68$  m,  $x_1 = 0,5$  m i  $h = 0,12$  m koji su opisani slikom 5.15. Sonda koja mjeri tlak je postavljena na desnom zidu na visini od  $d = 0,01$  m od donje stijenke. Inicijalni razmak čestica iznosio je  $\lambda = 3,33$  mm, a simulacija je izvedena s konstantnim vremenskim korakom od  $\Delta t = 10^{-3}$  s. Numerički dobiveni rezultati uspoređeni su eksperimentalno očitanim vrijednostima, a usporedba je prikazana na slici 5.17. Rezultati dobiveni ISPH metodom općenito dobro prate eksperiment. Prvi brijeg na grafu 5.17 uzrokovan je silovitim udarom vode u zid nakon čega tlak pada dok se formira val s krestom. Tlak ponovo raste spajanjem stvorenog vala s slobodnom površinom, što se očituje s drugim brijegom. Udar vala u slobodnu površinu stvara novi val, a udarom novog vala tlak ponovo kratkotrajno naraste i opet se stvara novi mali

val. Međutim, navedeni porasti tlaka nisu zabilježeni u eksperimentu koji su proveli Hu i Kashiwagi, dok je navedeni efekt ipak zabilježen u sličnom eksperimentu pucanja brane koji provode Zhou *et al.* [39]. Na slici 5.18 prikazan je razvoj strujanja vode nakon udara u zid.



Slika 5.17: Usporedba vrijednosti tlaka nakon udara vode u zid u ovisnosti o vremenu, dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [38]. Tlak je mjereno na visini od 1 cm, a eksperimentalni rezultati su osrednjeni.

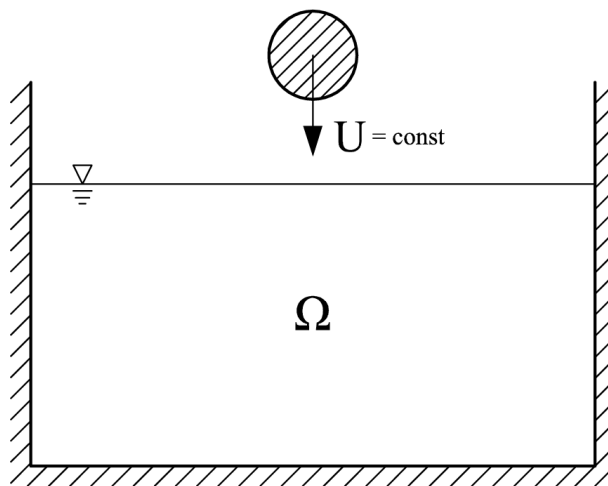


Slika 5.18: Razvoj strujanja vode nakon udara u zid s kvalitativno prikazanim poljem tlaka

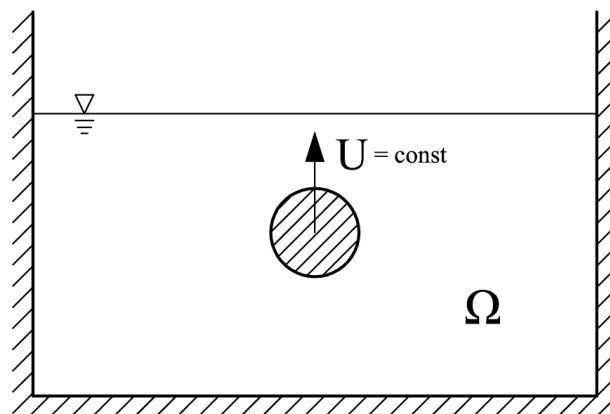
## 5.4 Ulaz i izlaz krutog tijela iz tekućine

U sljedećim podpoglavljima bit će predstavljene numeričke simulacije nasilnog ulaza u vodu te izlaza iz vode kružnog cilindra konstantnom brzinom. Izlaz uronjenog krutog tijela iz tekućine je problem koji je manje proučavan u odnosu na problem nasilnog ulaza tijela u tekućinu. Faza ulaza tijela u vodu uključuje tzv. *slamming* tj. udar tijela u slobodne površine. On se može povezati s formiranjem zračnih džepova i lokalnim hidroelastičnim efektima. U vrlo malom vremenskom intervalu, prilikom generiranja zračnih džepova stlačivost zraka je od značaja, no općenito ne utječe na odaziv krute konstrukcije. Gravitacija i viskoznost imaju zanemariv utjecaj prilikom početne faze ulaza tijela u tekućinu, ali postaju bitne u kasnijim fazama ili pak prilikom izlaza tijela iz tekućine.

ISPH metoda uspoređena je s eksperimentima koji je proveo Miao [40] 1989. godine u Marine Technology Centru u Trondheimu. Bazen u kojem je proveden eksperiment je 28 m dug, 2,5 m širok i 1 m dubok. Korišten je PVC cilindar promjera  $D = 0,125$  m i duljine  $L = 0,25$  m, na kojem je mjerena udarna sila. Kako bi se postigao dvodimenzionalni režim strujanja, na krajevima modela su pričvršćene široke ploče od pleksiglasa. Hidraulički sustav je teglio model konstantnom brzinom na različitim brzinama, do najveće brzine od  $U = 2,66$  m/s. Na slici 5.19 prikazana je shema prema kojoj je modelirana numerička simulacija ulaska cilindra u vodu, dok je na slici 5.20 prikazana shema prema kojoj je modeliran izlazak cilindra iz vode konstantnom brzinom.



Slika 5.19: Shema testa ulaza cilindra u vodu konstantnom brzinom



Slika 5.20: Shema testa izlaza cilindra iz vode konstantnom brzinom

#### 5.4.1 Ulaz cilindra u vodu konstantnom brzinom

Provedena su dva testa za usporedbu s eksperimentima, a okarakterizirani su definiranim konstantnim brzinama urona cilindra i Froudeovim brojevima koji su dani u tablici 5.1.

Tablica 5.1: Parametri eksperimenata ulaza cilindra u vodu konstantnom brzinom

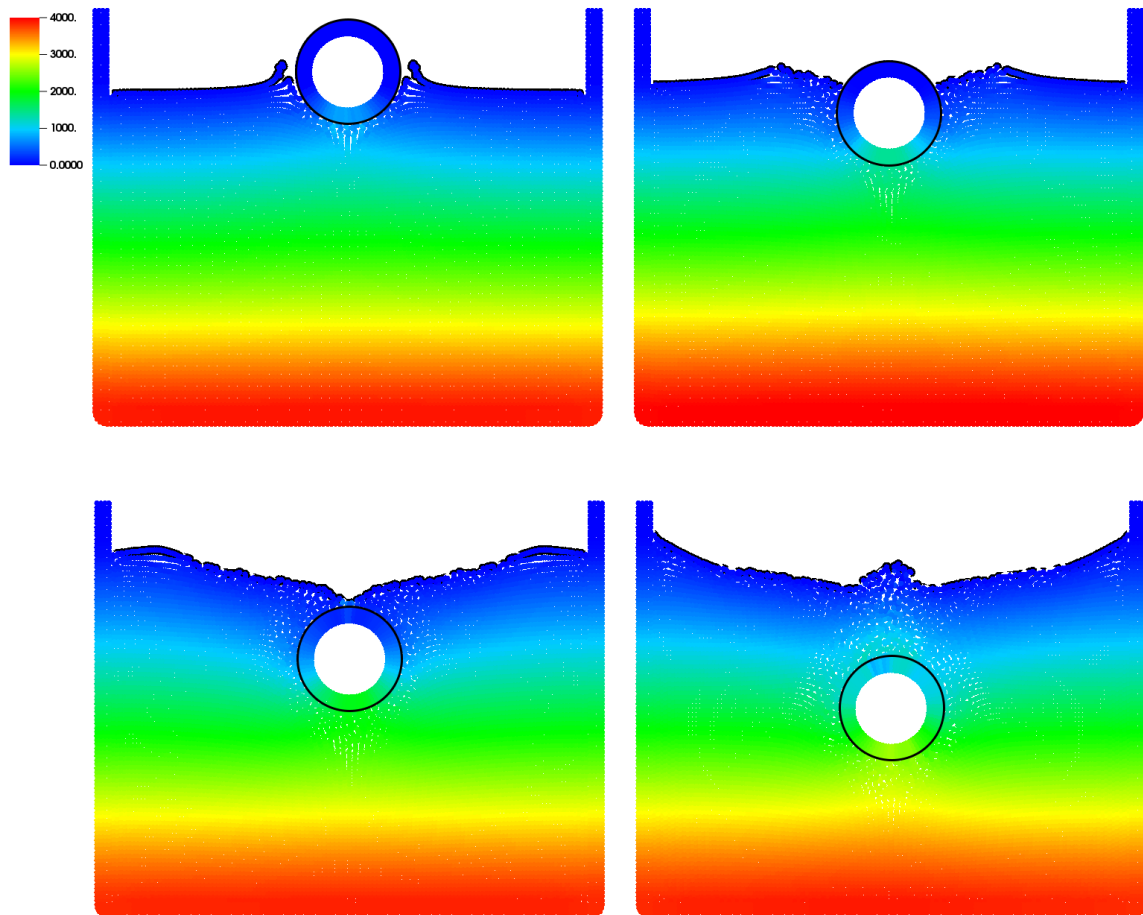
Eksperiment br.	1.	2.
Brzina cilindra, $U$	0,5124 m/s	0,876 m/s
Froudeov broj, $F_n$	0,4627	0,791

Predmet usporedbe rezultata jest bezdimenzionalna udarna sila, tzv. *slamming* koeficijent koji je definiran izrazom:

$$C_s = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 2R} = \frac{F_y}{\rho U^2 R} \quad (5.16)$$

gdje je  $R$  polumjer cilindra, a  $F_y$  je ukupna vertikalna hidrodinamička sila po jedinici duljine cilindra, koja je uzrok ulaska cilindra u vodu i uključuje silu uzgona. Mogući parametri koji utječu na udarnu silu su Froudeov i Reynoldsov broj, hrapavost površine cilindra te Eulerov, Weberov i Cauchyjev broj. Weberov i Cauchyjev broj vezani su uz površinsku napetost i stlačivost tekućine. Površinska napetost je važna pri opisu slobodne površine veće zakrivljenosti, poput spreja ili mjehurića, što bitno ne utječe na hidrodinamičko opterećenje konstrukcije te je zanemarena kao i stlačivost tekućine. Uzroci ovisnosti udarne sile o Froudeovom broju su stvaranje vala pri ulazu cilindra i sila uzgona. Reynoldsov broj malo utječe na rezultate jer je većina vrtloga koncentrirano u graničnom sloju oko cilindra.

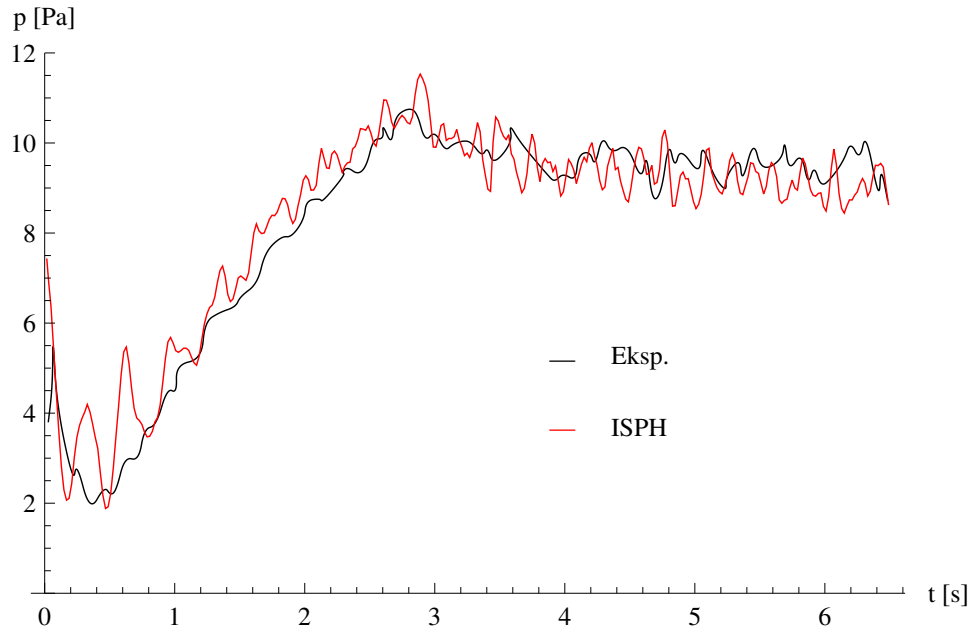
Numeričke simulacije provedene su u bazenu širine 0,6 m i dubine 0,4 m. Simulaciju su činile 10500 čestica sa inicijalni razmakom od  $\lambda = 0,005$  m. Na slici 5.21 prikazano je polje tlaka i deformacija slobodne površine. Nakon udara cilindra u slobodnu površinu, razvijaju se dva vala i stvara se zračni kanal dok cilindar ulazi u vodu. Kanal se postepeno zatvara te prilikom sudara dvije strane tvore kratkotrajni brijeg. Najveća vrijednost sile nastupa kad cilindar uroni u vodu neposredno nakon zatvaranja zračnog kanala.



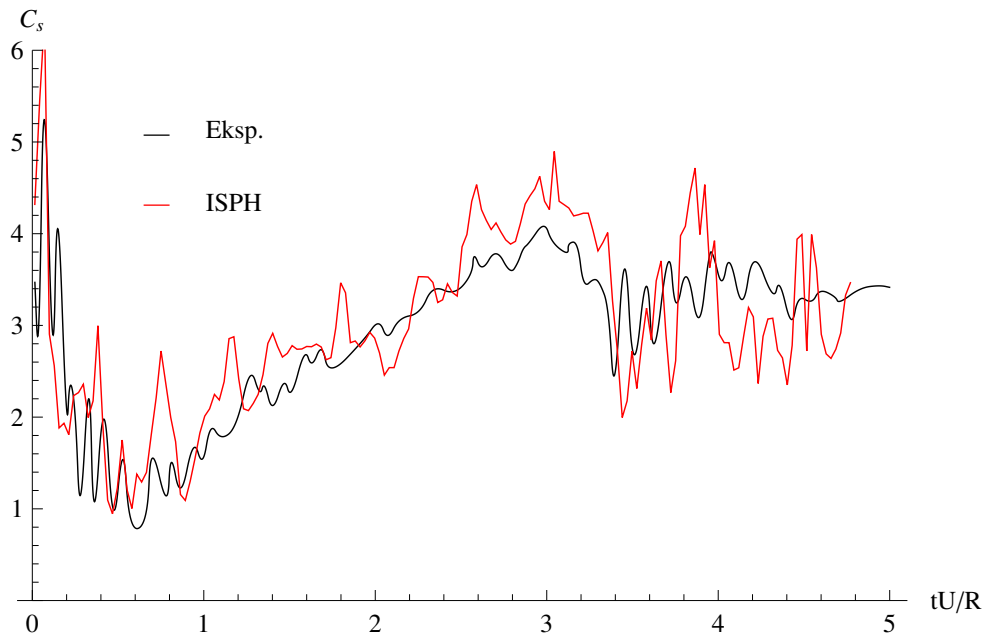
Slika 5.21: *Simulacija ulaza cilindra u vodu, eksperiment br. 1,  $U = 0,5124$  m/s,  $F_n = 0,4627$*

Slike 5.22 i 5.23 prikazuju bezdimenzionalnu silu koja djeluje na cilindar u ovisnosti o bezdimenzionalnom vremenu  $tU/R$ . Vrijednosti sile dobivene ISPH metodom, bez obzira na oscilacije koje su prouzrokovano oscilacijom polja tlaka porastom Froudeovog brojevima, vrlo dobro prate eksperimentalno dobivene vrijednosti. Osciliranje polja tlakova moguće je smanjiti boljim odabirom ulaznih parametara simulacije, poput smanjivanja razmaka čestica  $\lambda$ , duljine izgladivanja  $h$  i vremenskog koraka  $\Delta t$ . Međutim, eksperimentalne greške također postoje: uslijed istisnine i sile trenja ploča na krajevima, 3D efekata strujanja, hidroelastičnih efekata itd.





Slika 5.22: *Bezdimenzionalni slamming koeficijent za eksperiment br. 1,  $U = 0,5124$  m/s,  $F_n = 0,4627$ . Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [40].*

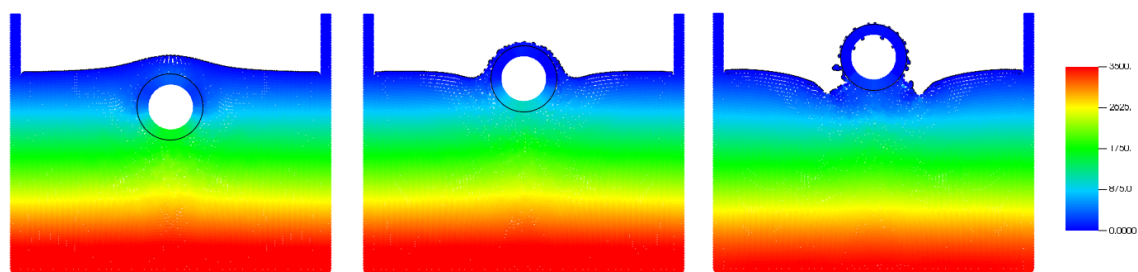


Slika 5.23: *Bezdimenzionalni slamming koeficijent za eksperiment br. 2,  $U = 0,876$  m/s,  $F_n = 0,791$ . Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom i eksperimentalno [40].*

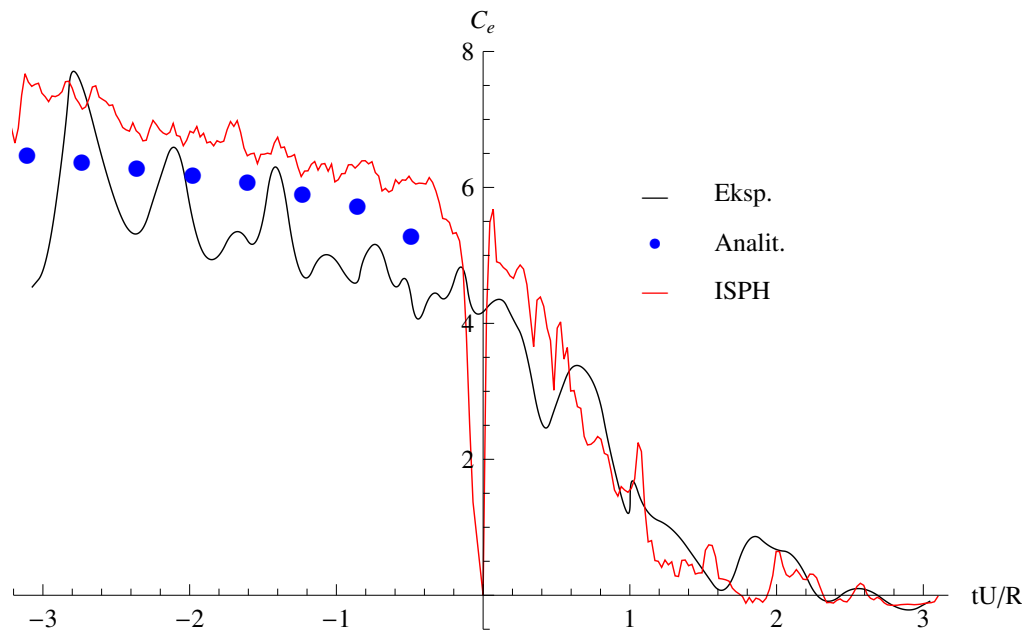
### 5.4.2 Izlaz cilindra iz vode konstantnom brzinom

Za izlaz cilindra iz vode proveden je jedan test za usporedbu s eksperimentom koji je karakteriziran konstantnom brzinom cilindra  $U = 0,5124 \text{ m/s}$  odnosno Froudeovim brojem  $F_n = 0,6903$ . Predmet usporedbe rezultata jest bezdimenzionalna sila na cilindar  $C_e$ , koja je definirana analogno *slamming* koeficijentu (5.16). Eksperimentalna očitavanja osciliraju što je najvjerojatnije uzrokovano neželjenim vibracijama koje su izazvali dodatnu masu i strukturne inercijske sile na cilindru. Vibracije su vjerovatno povezane s hidrauličkim sustavom koje radi na principu pomaka, a male devijacije izazivaju velika ubrzanja. Zhu predlaže pojednostavnjeni model za dobivanje vertikalne sile na cilindar [41]. Model ne uzima u obzir slobodnu površinu te vrijedi u trenutcima kada još cilindar nije u neposrednoj blizini slobodne površine. Prema tome, vrijednosti sile dobivene ISPH metodom uspoređene su s eksperimentalno i analitički dobivenim vrijednostima. Slika 5.25 prikazuje bezdimenzionalnu silu koja djeluje na cilindar.

Numerički model cilindra vertikalno jednoliko ubrzava do karakteristične brzine. Da bi se mogao koristiti veći vremenski korak i poboljšati strujanje oko cilindra, korišteno je ispravljanje položaja čestica opisano u podpoglavlju 4.6 te je povećana viskoznost vode. Simulacija je zbog ispravljanja položaja čestica i velikog vremenskog koraka na trenutak izgubila stabilnost što nije bitno utjecalo na daljnje rezultate ukupne sile na cilindar. Iako su numerički dobivene vrijednosti zbog velike viskoznosti nešto veće od referentnih, vidljivo je dobro preklapanje rezultata. Na slici 5.24 prikazano je polje tlaka i deformacije slobodne površine. Dok se cilindar približava slobodnoj površini, ona se uzdiže sve više smanjujući polumjer zakrivljenosti do polumjera cilindra. Pri izdizanju cilindra iz vode, voda na kratko nastavlja vertikalno strujati.



Slika 5.24: Simulacija izlaza cilindra iz vode, eksperiment br. 1,  $U = 0,5124 \text{ m/s}$ ,  $F_n = 0,4627$



Slika 5.25: *Bezdimenzionalna sila prilikom izlaza iz vode za eksperiment br. 1,  $U = 0,5124$  m/s,  $F_n = 0,4627$ . Usporedba rezultata dobivenih ISPH metodom, eksperimentalno [40] i analitički [41].*

## 6 Zaključak

Prikazana je metoda hidrodinamike izgladenih čestica za simuliranje dinamike nestlačivog viskoznog fluida pomoću sustava čestica, tzv. ISPH metoda. U odnosu na klasičnu SPH metodu, ISPH se temelji na projekcijskoj shemi rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi. Prednost te implicitno-eksplicitne sheme jest mogućnost korištenja većeg vremenskog koraka, a dobivena polja tlaka i brzina su izgladenija u odnosu na ona dobivena pomoću eksplicitne SPH metode.

Razvijena je računalna implementacija pomoću koje je provedena verifikacija i validacija predloženog modela simulirajući različite probleme za koje su poznata analitička, eksperimentalna ili već verificirana numerička rješenja. Izvedena su četiri tipa simulacija: razvoj fluida u vakuumu, strujanje fluida bez slobodne površine, strujanje fluida sa slobodnom površinom te udari krutog tijela s fluidom. Numerički dobiveni rezultati tri simulacije različitog razvoja fluida u vakuumu u izuzetno dobrom su slaganju s analitičkim i numeričkim rješenjima. Za problem strujanja fluida bez slobodne površine odabran je primjer strujanja u kvadratnoj šupljini potaknuto gibanjem gornje stijenke. Rezultati polja brzina simulacija u dobrom su slaganju s podacima koji su dali Ghia *et al.* [34]. Problem strujanja fluida sa slobodnom površinom opisan je simulacijom rušenja brane. Nakon pucanja brane, ISPH metoda je uspješno oblikovala slobodnu površinu u oblik gljive koji se transformira u val s krestom. Nakon rušenja brane tekućina udara u vertikalni zid. Izmjereni tlakovi u dobrom su slaganju s eksperimentom koji su proveli Hu i Kashiwagi [38]. Simulirano je nasilno uranjanje i izranjanje cilindra konstantnom brzinom, a numerički dobiveni rezultati koji su uspoređeni s eksperimentima koje je proveo Miao [40] vrlo dobro se slažu.

Dokazano je kako ISPH metoda može sačuvati ukupni volumen fluida s dovoljno malim vremenskim koracima koji zadovoljavaju CFL uvjet. Potrebno je napomenuti kako premali vremenski koraci mogu uzrokovati oscilacije u polju tlaka. Vremenski korak se može smanjivati i težiti prema nuli, ali je shodno tome potrebno smanjivati razmak među česticama. Rubni uvjeti za SPH metodu se i dalje proučavaju i razvijaju jer imaju poteškoće pri nametanju Neumannovog rubnog uvjeta na kompleksnoj geometriji. Također, za simulacije kompleksnih strujanja trebalo bi razmotriti uvođenje nekog od turbulencijskih modela, što u ovom radu nije bilo spomenuto.

Dakle, dobrim izborom ulaznih parametara ISPH metoda može biti stabilna za veliki broj različitih problema i pri tome dati točna rješenja te izgladena polja tlaka i brzina. Problemi

s deformacijama slobodne površine te problemi koji uključuju međudjelovanje krutih tijela i fluida sa slobodnom površinom mogu biti kvalitetno simulirani ISPH metodom. ISPH metoda posjeduje potencijal da postane atraktivnim izborom za rješavanje problema dinamike fluida gdje klasične Eulerove metode nailaze na poteškoće, pogotovo u brodogradnji gdje se javljaju problemi "silovitog" strujanja fluida poput zapljuskivanja u tankovima, udaranja pramca o slobodnu površinu i zalijevanja palube.

# Literatura

- [1] LUCY L. B. (1977): A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, 82, pp. 1013-1024
- [2] GINGOLD R. A., MONAGHAN J. J. (1977): Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc.*, 181, pp. 375-389.
- [3] MONAGHAN J. J. (1992): Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, pp. 543–574
- [4] MONAGHAN J. J. (1994): Simulating free surface flows with SPH, *J. Comput. Phys.* 110, pp. 399–406
- [5] CUMMINS S. J., RUDMAN M. (1999): An SPH projection method, *J. Comput. Phys.* 152, pp. 584–607
- [6] FEFFERMAN C. L. (2000): Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation, *Clay Mathematics Institute*
- [7] MORRIS J. P., FOX P.J., ZHU Y. (1997): Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *J. Comput. Phys.* 136, pp. 214-226.
- [8] OGER G., DORING M., ALESSANDRINI B. (2007): An improved SPH method: towards higher order convergence, *J. Comput. Phys.* 225, pp. 1472-1492
- [9] BONET J., LOK T. S. L. (1998): Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamics formulations, *ComputerMethods in Applied Mechanics Engineering* 43, pp. 785 - 819
- [10] MARRONE S. (2011): Enhanced SPH modeling of free-surface flows with large deformations, Ph. D., University of Rome, La Sapienza
- [11] CHORIN A. J. (1968): Numerical solution of the Navier–Stokes equations, *J. Math. Comp.* 22
- [12] TEMAM R. (1968): Une méthode d’approximation des solutions des équations Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France* 98, pp. 115–152

- [13] GUERMOND J. L., MINEV P., SHEN J. (2006): An overview of projection methods for incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195, pp. 6011–6045
- [14] GODA K. (1979): A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, *J. Comput. Phys.* 30, pp. 76–95
- [15] VAN KAN J. (1986): A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (3), pp. 870–891
- [16] TIMMERMAN L. J. P., MINEV P. D., VAN DE VOSSE F.N. (1996): An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 22, pp. 673–688
- [17] FENG J. J., HOSSEINI S. M. (2011): Pressure boundary conditions for computing incompressible flows with SPH, *J. Comput. Phys.* 230, pp. 7473–7487
- [18] LIND S. J., XU R. STANSBY P. K. (2012): Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves, *J. of Comput. Phys.*, 231, pp. 1499–1523
- [19] DALRYMPLE R. A., ROGERS B. D. (2006): Numerical modeling of water waves with the SPH method, *Coastal Engineering*, 53, pp. 141–147
- [20] KOSHIZUKA S., NOBE A., OKA Y. (1998): Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp. 751–769.
- [21] SHAO S., LO E. (2003): Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with free surface, *Advances in Water Resources* 26, pp. 787–800
- [22] XU RUI (2009): An Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics Method and Its Application in Free-Surface Simulations, Ph. D., University of Manchester
- [23] LEE E.S., MOULINEC C., XU R. (2008): Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method, *J. Comput. Phys.* 227, pp. 8417–8436
- [24] DONG T., JIANG S. (2010): Comparisons of Mirror and Static Boundary Conditions in Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics, *Int. Conf. on Comput. and Information Sci.* 2010.

- [25] BØRVE S. (2011): Generalized Ghost Particle method for handling reflecting boundaries, 6th international SPHERIC workshop, Hamburg
- [26] YILDIZ M., ROOK R. A., SULEMAN A. (2008): SPH with the multiple boundary tangent method, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 7, pp. 1416-1438
- [27] LASTIWKA M., BASA M., QUINLAN N. J. (2008): Permeable and nonreflecting boundary conditions in SPH, *Int. J. Num. Methods Fluids* 61, pp. 709–724
- [28] BØCKMANN A., SHIPILOVA O., SKEIE G. (2012): Incompressible SPH for free surface flows, *Computers & Fluids*, 67, pp. 138–151
- [29] SWEGLE J. W., HICKS D. L., ATTAWAY S. W. (1995): Smoothed Particle Hydrodynamics stability analysis, *J. Comp. Phys.* 116, pp. 123–134
- [30] MONAGHAN J. J. (2000): SPH without a tensile instability, *J. Comput. Phys.* 159, pp. 290–311
- [31] OPENCL: <http://www.khronos.org/opencl/>, Khronos Group
- [32] COLAGROSSI A. (2003): A Meshless Lagrangian Method for Free-Surface and Interface Flows with Fragmentation, Ph. D., University of Rome, La Sapienza
- [33] COLICCHIO G. (2004): Violent disturbance and fragmentation of free surfaces, Ph.D., School of civil engineering and the environment, University of Southampton
- [34] GHIA U., GHIA K. N., SHIN C. T. (1982): High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method, *Journal of Computational Physics*, 48, pp. 387-411
- [35] STANSBY P. K., CHEGINI A., BARNES T.C.D. (1998): The initial stages of dambreak flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 374, pp. 407–424
- [36] JANOSI I. M., JAN D., SZABO K. G., TEL T. (2004): Turbulent drag reduction in dam-break flows, *Experiments in Fluids*, 37, pp. 219–229
- [37] KLEEFSMAN K. M. T., FEKKEN G., VELDMAN A. E. P., IWANOWSKI B., BUCHNER B. (2005): A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems, *J. of Comp. Phys.*, 206, pp. 363-393
- [38] HU C. H., KASHIWAGI M. (2004): A CIP method for numerical simulations of violent free surface flows, *J. Marine Sci. Technol.*, 9 (4), pp. 143-57



- [39] ZHOU Z. Q., DE KAT J. O., BUCHNER B. (1999): A nonlinear 3-D approach to simulate green water dynamics on deck, 7th Int. Conf. Numer. ship Hydrodynamics, Nantes
- [40] MIAO G. (1989): Hydrodynamic forces and dynamic responses of circular cylinders in wave zones, Dr. ing. thesis, Dept. of Marine Hydrodynamics, NTH, Trondheim, Norway
- [41] ZHU X. (2006): Application of the CIP Method to Strongly Nonlinear Wave-Body Interaction Problems, Dr. ing. thesis, Norwegian Uni. of Sci. and Technology, Trondheim

# Dodatak I - Iterativno rješavanje linearnog sustava jednadžbi

Metoda stabiliziranog bi-konjugiranog gradijenta (BiCGSTAB) je iterativna numerička metoda koju je razvio *Van der Vorst*, s ciljem pronalaska rješenja nesimetričnih kvadratnih linearnih sustava jednadžbi. Ona je kombinacija BiCG i GMRES metode. Daje vektor rješenja ugađenih vrijednosti i brže konvergira, ali zahtjeva dva produkta matrice i vektora po iteraciji. U nastavku je dan prikaz BiCGSTAB algoritma gdje je konvergencija kontrolirana s dva parametra: najvećom dopuštenom greškom rješenja i najvećim dopuštenim brojem iteracija.

---

**Algoritam 2** Stabilizirani bi-konjugirani gradijent
 

---

$$r_0 = p_0 = b.$$

Za  $k = 1, 2, \dots, k_{max}$ :

$$v_{k-1} = A p_{k-1},$$

$$\alpha_{k-1} = \frac{r_{k-1} \cdot r_0}{v_{k-1} \cdot r_0},$$

$$s_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

$$t_k = A s_k,$$

$$\omega_k = \frac{s_k \cdot t_k}{t_k \cdot t_k},$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1} + \omega_k s_k,$$

$$r_k = s_k - \omega_k t_k,$$

Ako je  $\sqrt{r_k \cdot r_k / b \cdot b}$  manje od dopuštene greške, prihvati  $x_k$  kao rješenje.

Inače nastavi petlju,

$$\beta_k = \frac{\alpha_{k-1}}{\omega_k} \frac{r_k \cdot r_0}{r_{k-1} \cdot r_0},$$

$$p_k = r_k + \beta_k (p_{k-1} - \omega_k v_{k-1}).$$


---

## Dodatak II - Primjeri ulaznih datoteka

### Rastezanje inicijalno kružne kapljice

```
1 <simulation>
2   <name value="drop"/>
3   <precision value="single"/>
4   <solver type="isph">
5     <projection type="non-incremental" order="1"/>
6     <ppe_solver type="bicgstab" tolerance="1e-4" max_iterations="500"/>
7     <free_surface value="1.4" dirichlet="weak"/>
8   </solver>
9   <devices type="gpu" count="all" />
10  <boundary>
11    <min value="-1.0 -4.0"/>
12    <max value="1.0 4.0"/>
13  </boundary>
14  <gravity value="0; 0"/>
15  <particle_spacing value="0.01"/>
16  <smoothing_kernel type="quintic" value="0.022" correction="no"/>
17  <fluid name="water" density="1000" viscosity="0"/>
18  <setup>
19    <circle name="drop" type="free surface">
20      <center value="0; 0"/>
21      <radius value="1"/>
22      <initialization>
23        <variable name="VELOCITIES">-100*x; 100*y;</variable>
24        <variable name="PRESSURES">0.5*DENSITY*100*100*(1.0 - (x*x + y*y))</variable>
25      </initialization>
26    </circle>
27    <bucket_fill name="water">
28      <location value="0; 0.99"/>
29    </bucket_fill>
30  </setup>
31  <run_time value="0.02"/>
32  <time_step value="0.0001"/>
33  <export format="vtk" time_step="0.001">
34    <variable value="PRESSURES"/>
```

```

35     <variable value="VELOCITIES"/>
36     <variable value="FREE_SURFACE"/>
37 </export>
38 <export type="probes" time_step="0.0001">
39     <variable value="PRESSURES"/>
40     <variable value="VELOCITIES"/>
41     <location>0 0</location>
42     <location>0.5 0</location>
43     <location>0 0.5</location>
44 </export>
45 </simulation>

```

### Ulaz cilindra u vodu konstatnom brzinom

```

1 <simulation>
2   <name value="cylinder entry"/>
3   <dimensions value="2"/>
4   <precision value="single"/>
5   <solver type="isph">
6     <projection type="non-incremental" order="1"/>
7     <ppe_solver type="bicgstab" tolerance="1e-3" max_iterations="500"/>
8     <free_surface value="1.5" dirichlet="weak"/>
9   </solver>
10  <devices type="gpu" count="all" />
11  <boundary>
12    <min>-0.5 -0.3</min>
13    <max>0.5 0.8</max>
14  </boundary>
15  <gravity value="0; -9.81"/>
16  <particle_spacing value="0.01"/>
17  <smoothing_kernel type="quintic" value="0.012" correction="no"/>
18  <fluid name="water fluid" density="1000" viscosity="0.005"/>
19  <setup>
20    <circle name="cylinder" type="boundary">
21      <center value="0; 0.485"/>
22      <radius value="0.0625"/>
23      <movement start="0" end="0">
24        <velocity value="0; -0.876"/>
25      </movement>
26    </circle>

```

```
27     <line name="fluid top" type="free surface">
28         <start value="-0.4; 0.4"/>
29         <end value="0.4; 0.4"/>
30     </line>
31     <line name="bottom wall" type="boundary">
32         <start value="-0.4; -0.2"/>
33         <end value="0.4; -0.2"/>
34     </line>
35     <line name="left wall" type="boundary">
36         <start value="-0.4; 0.5"/>
37         <end value="-0.4; -0.2"/>
38     </line>
39     <line name="right wall" type="boundary">
40         <start value="0.4; -0.2"/>
41         <end value="0.4; 0.5"/>
42     </line>
43     <bucket_fill name="water fluid">
44         <location value="0; -0.19"/>
45     </bucket_fill>
46 </setup>
47 <run_time value="0.5"/>
48 <time_step value="1e-3"/>
49 <export format="vtk" time_step="0.01">
50     <variable value="PRESSURES"/>
51     <variabla value="VELOCITIES"/>
52     <variable value="FREE_SURFACE"/>
53 </export>
54 <export format="force" time_step="2e-3">
55     <body value="cylinder"/>
56 </export>
57 </simulation>
```